I FIORI GEOMETRICI

DEL PADRE ABBATE

D. GUIDO GRANDI

I FIORI GEOMETRICI

DEL PADRE ABBATE

D. GUIDO GRANDI

Tradotti e spiegati in grazia della studiosa Gioventù

DA TOMASO NARDUCCI

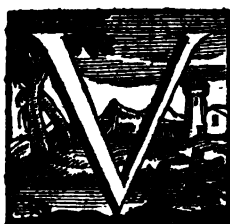
PATRIZIO LUCCHESE.

Con l'aggiunta di alcune Dimostrazioni dell' istesso Autore.

IN LUCCA, MDCCXXIX.

Per Francesco Marescandoli a Pozzotorelli.

Con Licenza de' Superiori.

CORTESE LETTORE.

V I presento il Trattato de' FIORI GEOMETRICI del PADRE ABBATE D. GUIDO GRANDI, il quale non meno per la novità, che per le sublimi dimostrazioni in esso contenute, acquistato si è l'applauso e l'ammirazione di tutte le più rinomate Accademie.

Testimonio ne sono, tra le altre, le approvazioni riportate in Inghilterra, la prima volta che uscì alla luce, (essendo stato pubblicato di nuovo nelle Transazioni filosofiche Inglesi) e gli elogj ricevuti da' Giornali de' Letterati. Avendovi poi modernamente aggiunti diversi Scolj, e molte nuove dimostrazioni, che tutta fanno la materia della Seconda Parte; il nostro Autore ha creduto di doverlo ristampare in Firenze per utile di quei, che delle Geometriche cose dilettansi.

E per verità, chi mettesi a studiare un simigliante Trattato, vede in esso la ma-

raviglioſa deſcrizione di nuove Curve, che con una maniera generale, [quale ſi è quella eſpreſſa dalla coſtante proporzione di due Lettere] c'inſegnano con modi ſempliciſſimi la formazione d'infiniti Fiori, che deſcritti ſono, o in un piano di circolo, come quelli della Prima Parte; o ſopra una ſuperficie emisferica, come quelli della ſeconda. Di queſti ſono tali le relazioni e l'ugualità, che provanſi avere con altre Curve geometriche, non meno che l'uguaglianza, che eſſi, o gli ſpazj particolari da eſſi racchiuſi, o fra li medeſimi interpoſti, hanno a Figure rettilinee e regolari; che con ammirazione di chi ne conſidera le proprietà, trovanſi perfettamente quadrabili. Il tutto poi è condotto con un giro di dimoſtrazioni finora a pochi uſitate, per vederſi in eſſe i principj de' nuovi Calcoli, Differenziale ed Integrale, nelle proporzioni delle Figure infinitamente piccole, e nell' uſo degli elementi delle Curve: per mezzo de' quali ſenza calcolo e con la ſola geometrìa lineare dimoſtra tante proprietà de' ſuoi Fiori Geometrici.

Que-

Questo maraviglioso modo di provare verità così recondite, basterebbe per se solo a rendere commendabil quest' Opera: Ma un non so che di pregio più nascoso, e solo alquanto palese a chi recasi a meditare i misterj della Natura, rendela ugualmente utile a i Geometri, che agli Studiosi della naturale Filosofia. Cominciò il famoso Newton a scoprire una strada, per addietro incognita, di spiegare i principj della Filosofia naturale con le dimostrazioni matematiche nel suo celebre Trattato de' Principj Matematici, ec. *dove osservando, che tutta la difficoltà della Filosofia in questo principalmente consiste, che da i Fenomeni de' Moti si rintraccino e si discoprano le forze della Natura, e poi da queste gli altri effetti si mostrino; nel primo e secondo Libro propone le proposizioni e i Teoremi generali, che risguardano il Moto in astratto: ma nel Libro III. applicate sotto le dette dottrine al Sistema del Mondo, ed a ciò, che risguarda l'Astronomìa. Pertanto, com' egli stesso si protesta nella sua prefazione, restavagli di estendere le dottrine meccaniche, già*

già applicate a i Moti Celesti, ancora agli altri Fenomeni della Natura in quel suo detto: Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret!

Ciò dunque, che quel grand' Uomo intraprese, e desiderò di proseguire, vedesi in parte adempiuto dal nostro P. ABBATE GRANDI nel presente Trattato: in cui la Scienza del Moto, ed i Principj meccanici applicati sono alla formazione de' Fiori, che tanta hanno parte negli effetti della Natura; giacchè questi sono i più bei parti della medesima nella produzione de' Vegetabili. Che tale stato sia il principal fine dell' Opera, chiaro si vede nella lettera scritta agli Accademici di Londra, posta in fronte alla prima Edizione, e più specialmente nello Scolio della Proposizione XII. della I. Parte, in cui dalle antecedenti proposizioni questa generale conseguenza deduce: Che dall' ultimamente proposta generale e sempliciſſima deſcrizione delle foglie della Rodonea derivata dal Circolo, si potria forse sospettare, che an-

ancora i primi fili, o ſtami delle foglie, che ſono naſcoſte nel ſeme del fiore, o del frutto, neceſſariamente debbano eſſer ſimili alle foglie coſpicue ed adulte (*e ne dà la ragione con dire*): Imperocchè ſe le foglie de' fiori e de' frutti imitaſſero veramente le noſtre Rodonee, ci potremmo immaginare, che i loro primi fili racchiuſi ne i ſemi di qualſivoglia ſpecie, ſieno circonſcritti da una ſempliciſſima figura circolare infinitamente piccola: Ma che dopo nel fiorire ſia così determinato il ſugo nutritivo da una forza particolare a qualſivoglia ſpecie, che mentre creſce pel lungo il loro aſſe, ſi vadano allargando per certe onde, ovvero giri intorno al loro centro, e queſto ſempre in una ragione determinata, ec. *Ciò che dà a conoſcere non meno l'intenzione del noſtro Autore, che l'ajuto, il quale porge a chi ſotto la ſua ſcorta intraprenda a paſſare più avanti a filoſofare ſulla Natura co' principj meccanici del Moto, e con la ſicura guida della Geometria.*

Que-

Questo Trattato appena fu impresso in Firenze, che l'Autore, per contrasegno di quella singolare benignità, con cui mi ha egli sempremai riguardato, me ne trasmise una Copia. Postomi subito a specolare sopra le tante e così nuove dimostrazioni, che in esso si leggono, fui forzato a trattenervi sopra il pensiero più lungamente di quello, che mi era immaginato: non so, se per colpa delle deboli forze mie, ovvero a cagione delle profonde verità, che in questo Trattato si ascondono. Conobbi dunque per esperienza, come quella più ferma e faticosa applicazione, la quale richiedevasi per ben intendere questo Trattato, proveniva dall' avere l'Autore lasciate senza dimostrazione molte proprietà, che alla di lui gran mente parvero a bastanza note; ma che, secondo il mio credere, bisogno hanno di prova per quelli, che nelle cognizioni geometriche per lungo uso versati non sono. Fattane dunque per mio studio e trattenimento la spiegazione, ed aggiuntevi alcune mie dimostrazioni, ardii di rendere nota all' Autore questa mia fatica; la quale non solo fu

lo fu da esso tollerata con la consueta amorevolezza sua, ma compiacquesi in oltre di mandarmi altre dimostrazioni, da me richieste, per inserirle nella spiegazione del presente Trattato. Ho procurato ancora di rendere più copiosa questa Traduzione con alcune proposizioni del Leibnizio, che riguardano la quadratura della Vela Fiorentina; e, perchè ad alcuna di esse mancava l'opportuna dimostrazione, ve l'ho io aggiunta col proprio studio.

Trovandomi intanto fra le mani questa mia fatica, ho giudicato di doverla mettere in luce; per dare alcuna dimostrazione di quell' ossequio, che all' Autore professo, e servire alla studiosa Gioventù: non intendendo di parlare a quelli, che nella Geometria e nello studio delle Matematiche sono già provetti, i quali volentieri rimetto al Trattato latino dell' Autore. Alla studiosa Gioventù, dissi, presento quest' Opera; e pregandola di gradire il pensiero, che avuto ho di giovarle, ed alleggerir la fatica, le desidero in ricompensa del gradimento, che ne spero, il viver felice.

Im-

Imprimatur.

OCTAVIUS ARCHIDIAC. SARDI
VICAR. GENER. CAPIT.

BARTHOLOMÆUS FRIDERIC.
DE PODIO PRÆP. ILLUSTR.
OFFICII JURISD.

I FIO:

FIORI GEOMETRICI.

FIORI GEOMETRICI si dicono in generale tutte quelle Figure circonscritte da una qualche curva pel giro di qualche foglie, che si vanno allargando da un medesimo Centro, i quali appunto mostrano le figure (1. 2. 3. 4. 5. 13.) se sono nell' istesso piano; se poi sono sopra una superficie curva, sono espressi dalle figure (32. 33. 34.) i quali Fiori secondo il numero delle foglie si dicono *unifolii*, *bifolii*, *trifolii*, *tetrafolii*, *pentafolii*, *esafolii*, *&c.*

Essendo innumerabili i modi, co i quali tali Fiori si possono generare, si prenderanno ad esporre due sole generazioni de' medesimi: una delle quali forma le *Rodonee*, e l'altra le *Clelie*.

PARTE PRIMA

DELLE RODONEE

DEFINIZIONI.

I. LE Rodonee sono curve, che passano da' termini d'infiniti rami provenienti dal medesimo centro: i quali rami sono uguali a i seni degli angoli, che hanno una qualche ragione data agli angoli, che comprendono i rami con una retta data di posizione.

Fig. 6. Spiegazione. *La curva CLEI, che passa da' termini de' rami L, E, I, che provengono dal medesimo centro C, i quali rami, come CI, sono uguali a i seni GH degli angoli GCA, che hanno agli angoli, DCA [che comprendono i rami CI colla retta CA data di posizione] la ragione costante di* b *ad* a; *detta curva è una Rodonea.*

II. Una tal ragione costante degli angoli si chiama la ragione propria della Rodonea.

III. La Rodonea semplice è quella, che è formata da una semplice circolazione; la doppia, che è formata da una doppia, la triplice da una triplice circolazione.

SCOLIO.

Fig. 6. e 7. Per la descrizione delle Rodonee preso un circolo KFA ad libitum, il di cui centro C, e tirato arbitrariamente il raggio CD inclinato al raggio CA dato di posizione, se si farà l'angolo DCA all' angolo GCA, ovvero l'arco DA all' arco GA in qualsivoglia costante ragione di *a* a *b*; e tirato il seno GH, si faccia CI = GH il punto I sarà uno de' punti della Rodonea della data ragione di *a* a *b*; e se le foglie della Rodonea sieno comprese da una sola circolazione, come nelle prime

me quattro figure, la Rodonea sarà semplice: se la perfetta descrizione di tutte le foglie richieda una doppia, o una tripla circolazione, sarà una Rodonea dupla, o tripla; e così successivamente secondo il numero delle circolazioni.

Più a basso si darà una descrizione più semplice, e più spedita di qualsivoglia foglia della Rodonea ne' corollarj della Proposizione XII.

A questo si aggiunga, come si potrà concepire che la generazione delle Rodonee dependa da un doppio moto, che si faccia nel medesimo tempo; uno cioè equabile del raggio C A mosso circolarmente intorno al centro C; l'altro del punto C, che ascenda, e poi discenda pel medesimo raggio sollecitato detto punto C da tali forze, che sieno rappresentate dal seno del compimento dell' angolo G C A, cioè dal seno diretto dell' angolo F C G; il qual angolo G C A (avendo il punto C passato l'angolo D C A per mezzo del raggio mobile, che intanto ha scorso) sia all' angolo D C A nella data ragione di b ad a, che si è detta, la ragione propria della Rodonea.

Dimostrazione e spiegazione dell' Autore (figura 14. 15.) il punto mobile C comincia dal centro C a rampicare su per lo ramo colla velocità C A, mentre che il raggio si muove in giro equabilmente con una velocità $= V$, che stia alla C A come a a b [nella ragione propria della Rodonea] di maniera che la velocità del raggio essendo $= a$ si potrà chiamare la prima velocità del punto mobile nelle sue mosse $= b$

Sia ora il punto mobile venuto in I, ed ivi abbia una velocità $= u$, ed il raggio sia nel sito C D, ed in un tempo infinitesimo scorra il raggio l'archetto D d, ed il punto I venga in i salendo per l'altezza R i; dunque la velocità del raggio alla velocità del punto mobile è come tali spazietti D d, R i; sicchè sarà $a . u$: : D d . R i; sono ancora $a . b$: : D d . G g (per esser D A, G A e d A, g A *nella ragione di* a *a* b *per il presente Scolio, e però levando da* d A, D A, *e da* g A, G A *resteranno* a . b : : D d. G g)

Gg); dunque *b*.*u*:: G*g*.R*i* [*poichè essendo* u.a.b | Ri. Dd. Gg, *sarà alternando* u *a* b, *come* Ri *a* Gg, *e convertendo* b *ad* u *come* Gg *ad* Ri] Ma R*i* = gO perchè uguagliandosi i rami CI a i seni GH, le loro differenze R*i*, *g*O saranno uguali; dunque *b*.*u*:: G*g*.*g*O. Ora i triangoli *g*OG, HGL, *g*C*b* sono simili, (*poichè essendo simili i triangoli* ghL, GHL *sarà l'angolo* HGL *uguale all'angolo* hgL *o* OgG, *e però i triangoli* HGL *ed* OgG *sono simili. Di più il triangolo* CgL *rettangolo in* g *sarà simile a i triangoli* Cgh, ghL, GHL); *dunque sarà* gG.gO:: Cg.C*b* *ma* Cg = CA, *e però* *g*G.*g*O:: CA.C*b*; onde *b*.*u*:: CA.C*b*; dal che ne viene che esponendosi la prima velocità del punto mobile col raggio, o seno totale CA, la velocità del medesimo nel punto I si rappresenta dalla C*b* (*ovvero dalla* CH *non differendo che per la differenza infinitamente piccola* h*H*) seno di compimento; e però ciascheduna delle velocità del punto mobile, e la forza attuale, da cui hic & nunc si trova spinto, è come il detto seno (*per supporsi detta forza come le velocità.*)

Quindi è chiaro, che nel tempo, in cui il raggio scorre equabilmente l'arco AD, il punto mobile ha perduta la parte AH della sua primiera velocità CA, onde era affetto sul principio; e nel tempo del moto per l'arco A*d* si trova il punto mobile over perduta la parte di velocità A*b*; e però nel minimo tempo infinitesimo, in cui si muove il raggio per D*d*, il punto mobile patisce il detrimento di velocità H*b*.

Onde bisogna concepire, che nel moto del punto mobile pel raggio, venga esso ritardato da una specie di gravità, che lo ritira al basso verso il centro C, raccorciandoli di mano in mano la velocità impressa CA fino alla totale estinzione, che accade nel punto E; indi in poi riconducendolo a basso, ed accelerandolo co' medesimi gradi fin'a tanto, che riacquisti la stessa velocità CA discendendo per l'altra parte della curva, e ritornandosene al centro, come accade ne' nostri gravi gettati in alto: con questo divario, che la nostra gravità si stima esser

ser costante, ed invariabile, almeno nelle altezze, nelle quali possiamo fare quì le nostre esperienze; laddove la forza ritardatrice nell' ascendere del punto mobile, descrivendo la mezza foglia dal centro alla cima, e l'istessa forza, che diventa acceleratrice nel discendere di esso punto descrivendo l'altra metà della foglia dalla cima al centro, varia appunto nella ragione delle distanze dal centro, come nel sistema del Padre Ceva.

Imperocchè una forza ritardatrice è proporzionale al suo effetto, cioè al decremento di velocità, che cagiona allo stesso mobile in un tempo infinitamente piccolo; e però tal forza ritardatrice è alla forza attuale, che rimane nel mobile in I come H*h*, ad R*i*, o come GO a *g*O (*per esser* Hh = GO, *ed* Ri = gO) ma come GO a *g*O, così *gh* ad *h*C, o GH ad HC (*essendo le differenze* gO, h*H* *infinitamente piccole*) dunque rappresentandosi da CH la forza attuale, con cui si muove il mobile in I, verrà la forza ritardatrice espressa dal seno retto GH, cioè dal ramo stesso CI; sono adunque le forze suddette ritardatrici (e conseguentemente ancora le acceleratrici nel descriversi dal punto discendente l'altra parte della curva) proporzionali alle distanze dal centro C.

Se la forza della gravità scema nell' accostarsi al centro della terra in ragione delle distanze, la linea, che un grave cadente da una torre descriverebbe nell' ipotesi della Terra mossa col moto diurno, sarebbe appunto una Rodonea di quella ragione, che ha il tempo della caduta di un mobile pel raggio della Terra al tempo di sei ore, in cui si gira la Terra per un quarto del suo gran cerchio.

Spiegazione. *Poichè scemando la forza della gravità nell' accostarsi al centro in ragione delle distanze come* (fig. 15.) *in ragione della distanza* CH *supposto che il grave, che si muove da A verso il centro C, si trovi in H, sarà in tal supposto la forza della gravità eguale alla forza ritardatrice, o acceleratrice detta di sopra, appartenente alla Rodonea: la di cui ragione di* a *a* b *doverà esser quel-*

la

la del tempo per C A al tempo per A F, ma il tempo del moto per A F; o, che è il medesimo dell' istesso A F supposto quadrante del circolo massimo della Terra è $\frac{1}{4}$ *del tempo diurno, cioè di ore 24.; dunque la ragione di* a *a* b *della Rodonea sarà quella del tempo della caduta per C A al tempo del quadrante A F di ore sei.*

Misureremo adunque nelle seguenti proposizioni le proprietà principali di tali Rodonee, come ancora i loro spazj e perimetri.

PROPOSIZIONE I.

Fig. 6. e 7.

S*E l'Arco* E *A sarà al quadrante A F, o l'Angolo E C A al retto F C A come* a *a* b; *sarà E C uno de' massimi rami della Rodonea, ovvero E sarà la sommità di una delle sue foglie.*

In vigore della descrizione della Rodonea data nello Scolio antecedente il ramo CE debbe essere uguale ad FC seno del quadrante AF; ma FC raggio è il massimo di tutti i seni; dunque il ramo CE sarà il maggiore di tutti i rami.

Si aggiunga, che allora svanirà il seno del compimento dell' angolo, che ha ad ECA la ragione di *b* ad *a*, e però la forza movente il punto mobile nel raggio, che è espressa da un tal seno, come si è detto di sopra, cessa di promuovere avanti il medesimo punto; e dopo il seno del compimento, che corrisponde al maggiore angolo, cade all' altra parte del centro: onde la forza paracentrica si muta di centrifuga in centripeta, ed obbliga il medesimo punto mobile a ritornare verso il centro, e descrivere nel suo ritorno l'altra parte della foglia della Rodonea, finchè un simile seno di nuovo svanisca (essendo ridotto al centro il punto, che descrive la curva) e di nuovo cominci a stendersi in un' altra parte, e di nuovo revivisca la forza paracentrica, che allontani dal centro quel punto mobile acciocchè descriva un' altra fronda.

PRO-

PROPOSIZIONE II.

Qualsivoglia foglia della Rodonea si sparge intorno all' asse C E *con eguale, uniforme, e simile allargamento.* Fig. 6.

Imperocchè fatti di quà, e di là a CE gli angoli uguali ECM, ECD, per esser gli archi uguali intercetti EM, ED, se sarà l'arco AM ad AN come AE ad AF, ovvero come AD ad AG cioè nella data ragione di *a* a *b*, ancora i residui EM, FN, ed ED, FG saranno nella medesima ragione; e però essendo gli antecedenti EM, ED uguali, anche i conseguenti FN, FG saranno uguali fra di loro, come ancora i residui a i quadranti NK, GA; a' seni de' quali dovendo essere uguali i rami CL, CI della Rodonea, i medesimi rami CL, CI saranno ancor essi fra di loro uguali: onde si spargerà qualsivoglia foglia della Rodonea di quà, e di là all' asse CE con uguale ed uniforme allargamento.

Spiegazione. *Fatti di quà, e di là a* C E *gli angoli uguali* ECM, ECD *averemo gli archi uguali* EM, ED; *onde essendo per la proposizione antecedente* [*supposti* CE ⇄ CF] *AE ad AF come* a *a* b, *o come AD ad AG, se si farà come AE ad AF, così AM ad AN; sarà AM − AE ad AN − AF, cioè* ME *ad* FN *come* a *a* b; *nell' istessa maniera si proverà che* ED, FG *saranno nella medesima ragione di* a *a* b; *e però essendo gli antecedenti* EM, ED *uguali, anche i conseguenti* FN, FG *saranno uguali fra di loro. Detratti dunque da' quadranti* FK, F*A gli uguali* NF, FG, *saranno ancora uguali i residui* NK, G*A*; *a i seni de' quali dovendo essere uguali i rami* CL, CI, *cioè* CL *al seno di* NK, *e* CI *al seno* GH *per la natura della Rodonea, saranno anch' essi fra di loro uguali, ec.*

CO-

COROLLARJ.

I. Essendo uguali gli archi E M, E D, sarà A E medio aritmetico fra A M ed A D, che sono terminati da' rami uguali della Rodonea; e però la loro somma adegua il doppio di quello, ovvero è eguale a tutto l'arco A E P del settore, che circonscrive una foglia della Rodonea.

Spiegazione. *Che A E sia medio aritmetico fra A M ed A D, essendosi provato E M = E D, ne viene in conseguenza; poichè E A supera D A coll' istessa differenza E D o M E, colla quale E A è superato da M A, ec.*

II. Da ciò ancora ne proviene che l'arco M P è uguale all' arco A D.

Spiegazione. *Essendosi provato nel precedente corollario che A M + A D = A P, levando dall' uno e l'altro l'arco comune M D resteranno eguali P M, D A.*

III. E la somma de' medesimi archi A M, A D sarà alla semiperiferia A N K nella data ragione di *a* a *b*, la quale ha A E al quadrante A F.

Spiegazione. *Poichè essendo pel primo corollario A E la metà della somma A M + A D; ed essendo per la Proposizione prima A E ad A F quadrante come* a *a* b, *sarà ancora A M + A D alla semiperiferia A N K nella ragione di* a *a* b.

IV. Ed il Settore circonscritto alla Rodonea è al semicircolo nella medesima data ragione di *a* a *b*, la quale ha l'arco A P, ovvero la somma dell' uno e dell' altro A M, A D alla semiperiferia A N K.

Spiegazione. *Che il settore circonscritto alla Rodonea P C A sia al semicircolo A N K A nella ragione dell' arco A P alla semiperiferia A N K, e però pel corollario terzo nella ragione di* a *a* b, *sarà chiaro, se si riflette che qualsivoglia settore, ed il semicircolo sono sotto la medesima altezza del semiraggio* $\frac{1}{2}$ *CE* = $\frac{1}{2}$ *C F; onde saranno come le basi P A, A N K.*

PRO-

PROPOSIZIONE III.

I*L numero delle foglie, con le quali si forma un' intera Rodonea semplice, è all' unità come* 2 b *ad* a.

Imperocchè tante foglie si formano da questa descrizione, quanti settorj circonscritti a qualsivoglia foglia si ponno disporre dentro il circolo; Ma pel Corollario quarto precedente qualsivoglia settore è al semicircolo come a a b, e però al circolo come a a $2b$; onde il numero delle foglie in una circolazione, che è il medesimo che il numero de' settori, che riempiono il medesimo circolo, è ad 1 come $2b$ ad a; il che, ec.

COROLLARJ.

I. Da ciò si deduce, che potremo descrivere una Rodonea semplice, che contenga il dato numero m [che sia sei] delle foglie; se in vece della ragione di a a b si prenda la ragione di 1 ad $\frac{m}{2}$ (nel caso proposto di 1 a 3), e così sarà $2b$ ad a, come m ad 1, cioè in questa ipotesi come 6 ad 1, e però ne verrà il dato numero m delle foglie; cioè risulterà la Rodonea esafolia. Si veda però lo Scolio seguente.

Spiegazione. *Acciocchè la Rodonea, che io voglio descrivere, contenga il dato numero delle foglie come* m, *bene si prende, in vece di* a a b, 1 *ad* $\frac{m}{2}$, *poichè averemo* $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{m}{2}} = \frac{2}{m}$ *che darà* $\frac{a}{2b} = \frac{1}{m}$, *e però* a . 2b : : 1 . m, *e convertendo* 2b . a : : m . 1, *a tenore della Proposizione antecedente; ovvero essendo* a a b, *come* 1 *ad* $\frac{m}{2}$, *e convertendo* b . a : : $\frac{m}{2}$. 1 *moltiplicando per* 2 *gli antecedenti della Proporzione sarà* 2 b . a : : m . 1

II. Ma di più con l'istess' arte formeremo una Ro-

B donca

donea dupla, tripla, quadrupla, ec. che ricorra in se stessa col dato numero di foglie, se per la Rodonea doppia si prenda la ragione di 1 ad $\frac{m}{4}$, [con che sia impari il dato numero *m*], altramente ne risulterebbe una Rodonea semplice sotto un doppio numero di foglie, che nella seconda circolazione si porrebbe sopra di se, ricorrendo per li medesimi vestigj delle foglie. Per avere la Rodonea triplice si prenda la ragione di 1 ad $\frac{m}{6}$; purchè il numero *m* non sia divisibile per tre: altramente di nuovo risulterebbe la Rodonea semplice contenuta sotto un triplo numero di foglie. Similmente per la Rodonea quadrupla si doverebbe prendere la ragione di 1 ad $\frac{m}{8}$; purchè, come sopra, il numero *m* sia numero impari; altrimenti ne nascerebbe la Rodonea semplice, o doppia (se non fosse pari di pari). Imperocchè rispetto alla Rodonea doppia è necessario, che nella prima circolazione si abbia un intero numero di foglie, e di più la metà di altrettante altre foglie; rispetto alla triplice un numero intero con un terzo di foglia, ovvero due terzi; rispetto alla quadruplice un intero numero con un quarto, o con tre quarti di un' altra foglia, e così successivamente nell' altre.

Spiegazione. *Si richiede per condizione necessaria, che sia impari il numero dato* m; *altramente si deduce, che ne risulterebbe una Rodonea semplice sotto un doppio numero di foglie; il che si dimostrerà come sopra dover succedere. Poichè essendo per supposizione* $a . b :: 1 . \frac{m}{4}$; *averemo* $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{m}{4}} = \frac{4}{m}$; *e però* $\frac{a}{4b} = \frac{1}{m}$; *cioè* $a . 4b :: 1 . m$, *e convertendo* $4b . a :: m . 1$., *Ma la Rodonea semplice per la Proposizione terza ha la proporzione di* $2b . a :: m . 1$; *dunque* $4b . a :: m . 1$ *dinota, che* m *esprime un doppio numero di foglie, come* $4b . a$ *esprime una proporzione doppia della prima; nel resto sono due Rodonee semplici totalmente*

mente uguali, e che riempiono tutto il circolo colle loro foglie, e però debbono essere, una sopra l'altra: il che non succede, se il numero delle foglie m *sia impari; poichè allora la proporzione di* a . 4 b : : 1 . m *non sarà doppia di* a . 2 b : : m . 1 *non essendo più questa la proporzione di una Rodonea semplice, le di cui foglie empiano tutti i settori del circolo circonscritto, come sarebbe se il numero* m *fosse pari; e però in tal caso non saranno l'una sopra l'altra, come meglio si dichiara nello Scolio seguente, e nella spiegazione dello Scolio della Proposizione IX. al* §. Se sarà ancora un' altra Rodonea, ec.

SCOLIO.

Si suppone in questa Proposizione e suoi Corollarj, che sia inscritta in qualsivoglia Settore di circolo qualsivoglia foglia della Rodonea, di maniera che non restino alternativamente nessuni settori voti; il che però spessissimo può e debbe accadere, quando la ragione di *a* a *b* sia la medesima, che quella dell' unità ad un numero impari, come persuade la continua descrizione di questa curva. Così se la ragione sarà di 1 a 3, ne verrà una curva (*fig.* 21. *e* 22.) che col piegamento A B C D E F G H H I C K A ricorra in se stessa, dopo di avere finite tre foglie, che occupano altrettanti settori M C R, C O Q, C L S, restando voti altrettanti settori interposti. Se la ragione di *a* a *b* sarà di 1 a 5, si descriverà una curva [*fig.* 23. *e* 24.] A B C D E F C G H I C K L M C N O P C Q A, che dopo cinque foglie ritornerà al medesimo principio, donde si partì con lasciare alternativamente cinque settori voti; i quali però si potrebbero riempire, se nel medesimo tempo, in cui il punto C si muove dal centro per descrivere queste curve, si fosse mosso per C S un altro punto con un moto simile, ma opposto, con descrivere una curva simile ed uguale in que' settori alterni e rimasti voti nella descrizione del punto C, come si suppone in questa Proposizione, e ne i Corollarj aggiunti. Ma ogni qual volta la ragione di *a* a *b* è la medesima, che quella dell'

unità ad un numero pari; da un semplice moto del medesimo centro, C che scorra secondo le leggi superiori pel raggio, mentre intanto questo compisce la sua circolazione, ne nascono tutte le foglie della Rodonea, che empiono ciaschedun settore: Non però in maniera che dopo la descrizione di una foglia ne nasca un' altra foglia a canto alla prima dalla medesima parte (il che può fingere una supposizione arbitraria, ma che non ammette la legge della continuazione del moto); ma sì bene nascerà l'altra foglia inscritta in un settore, che sia alla parte opposta, e contraposta al vertice del settore collaterale al primo; come se la ragione di *a* a *b* sia di 1 a 4 la piegatura della Rodonea [*fig.* 25.] passerà pe punti C *b* A B C D E F C G H I C K L, ec. toccando ciaschedun diametro *d e*, *g f*, *h i*, *n m*, respettivamente la convessità B C D di due foglie dall' una parte, e la convessità P C Q di due foglie dall' altra parte; come ancora *g f* toccherà dall' una parte la convessità F C G, e dall' altra T C S, *h i*, I C K, X C Y, e finalmente *n m*, a C *b*, N C M, acciò risultino otto foglie, che ritornino in se stesse dopo compita la circolazione. Di più in questa medesima Proposizione, e suoi Corollarj si suppone una tale descrizione delle Rodonee, che abbia le foglie descritte in settorj distinti, e che in nessuna parte siano sovraposte a loro stesse; il che però accade ogni volta, che la ragione di *a* a *b* non sia dell' unità ad un numero intero, ma ad una frazione maggiore dell' unità, ovvero di qualsivoglia numero ad un altro maggiore di se, e primo; così quando la ragione di *a* a *b* sarà subsequialtera, cioè di

1 a $\frac{3}{2}$ ovvero di 2 a 3, se considereremo solamente (nelle *fig.* 26. *e* 27.) le foglie distinte A B C F, H D C G, M I C L inscritte in altrettanti settorj, certamente il numero delle foglie [secondo questa Proposizione] sarà all' unità come 2 *b* ad *a*, cioè come 6 a 2 ovvero triplo. Ma se si attenderà la continua descrizione della curva, ne nascono necessariamente sei foglie, che sono in parte sovraposte a due, che loro sono a canto. Imperocchè la curva

pro-

procede secondo l'ordine delle lettere A B C D E F C G H D C I K G C L M I C B N L C F A ; e così nell' altre ragioni espresse da qualsivoglia numeri, che seguitino dall' unità, con osservare, che se l'uno e l'altro de' dati numeri sia impari, il numero delle foglie assolutamente sarà uguale al numero *b*; ma se uno sarà pari, sarà sempre il numero delle foglie uguale a 2 *b*, dimanierachè se la ragione sia di 5 a 7, ovvero 3 a 7, o 1 a 7, ne verrà sempre una Rodonea di 7 foglie, che se sarà di 6 a 7, o di 4 a 7, o 2 a 7, sarà la Rodonea di 14 foglie, ma sovraposte l'una all' altra. *Per la spiegazione di questo Scolio si veda ciò, che si è notato nella spiegazione dello Scolio della Proposizione II. Parte II.*

PROPOSIZIONE IV.

Fig. 6.

SE la ragione di a *a* b *non si possa esprimere in numeri, ma gli archi D A e G A sieno incommensurabili, saranno circomposte a loro medesime innumerabili foglie involte da infinite circolazioni.*

Imperocchè ogni circolazione, oltre un determinato numero di foglie intere, importerà una parte di foglia corrispondente ad un angolo incommensurabile rispetto all' angolo totale, che comprende la foglia intera; nè mai la descrizione ritornerà all' istesso punto, di manierachè l'equazione di una tal curva sia d'infiniti gradi.

Spiegazione. *Il numero delle foglie, con le quali si forma un' intera Rodonea semplice, è all' unità come* 2 b *ad* a *per la Proposizione terza, ma* 2 b *ad* a *ha una ragione, che non si può esprimere in numeri per lo supposto della presente Proposizione; dunque il numero delle foglie all' unità averà una ragione, che non si può esprimere in numeri; ma la ragione di due numeri, che non possa esprimersi in numeri è la sola ragione di un numero infinito ad un numero finito; dunque in tal caso il numero delle foglie sarà infinito.*

PRO-

PROPOSIZIONE V.

Fig. 8.

Ma se la ragione di a *a* b *sarà doppia, ne nascerà la Rodonea unifolia.*

Imperocchè l'arco A D E, che sia al quadrante A F come *a* a *b*, cioè nella ragione doppia sarà la semiperiferia; e però il semicircolo sarà il settore A F E, che comprende la mezza foglia C I E, il di cui asse E C (per la Proposizione I.); e però alla foglia intera si circonscrive il circolo intero.

Giacchè per la Proposizione III. il numero delle foglie è all' unità come 2 *b* ad *a*; ma essendo pel supposto della Proposizione *a* a *b* nella doppia ragione; dunque sarà *a* = 2 *b*; e però ancora il numero delle foglie sarà eguale all' unità.

Spiegazione. *Per la Proposizione I. essendo l'asse della Rodonea uguale al raggio del circolo, in cui è inscritta, sarà l'arco compreso dall' asse e dal raggio dato di posizione al quadrante, come* a *a* b, *cioè, come* 2 *ad* 1; *ma al quadrante come* 2 *ad* 1 *è la semiperiferia; dunque la semiperiferia* A D E *sarà l'arco suddetto, e però* C E *l'asse della Rodonea; e pel Corollario quarto della Proposizione II. il semicircolo sarà il settore* A F E, *che comprende la metà della foglia* C I E; *e però alla foglia intera si circonscrive un circolo intero.*

COROLLARJ.

I. Sarà facile la costruzione di una tale Rodonea unifolia, se sopra il raggio E C come diametro si descriva il semicircolo E S C, e tirata utcunque la corda E S D, e congiunto il raggio C D, e la corda C S, si faccia sempre C I = C S. Imperocchè essendo C S il seno dell' angolo C E S computato al raggio C E, ed essendo l'angolo A C D doppio dell' angolo C E D, apparterrà il ramo C I alla Rodonea di una doppia ragione secondo la generazione premessa.

Spie.

Spiegazione. *Secondo il supposto della presente Proposizione* a *sarà doppia di* b; *e però per la costruzione generale della Rodonea spiegata allo Scolio dopo la terza Proposizione, dovendosi prendere per uno de' rami della medesima il seno dell' angolo, che corrisponde a* b, *si doveva prendere il seno dell' angolo* CED, *che è la metà dell' angolo* DCA, *giacchè* b *è la metà di* a

II. Onde se ancora fatto centro in C con qualsivoglia intervallo CS si descriva in detto semicircolo l'arco PS, e tanto si prolunghi in I, che gli archi PS, SI sieno uguali, il punto I apparterrà alla Rodonea. Imperocchè CS nella precedente descrizióne sega in due parti uguali l'angolo ECD, ed essendo CI uguale a CS, il punto I sarà nell' arco del circolo descritto dal centro C, e che passa per I, il quale arco continuato in P rimane segato in due parti eguali in S

Spiegazione. *Che* SC *seghi in due parti eguali l'angolo* ECD, *è chiaro per essere l'angolo nel semicircolo* ESC *retto, ed essendo isoscele il triangolo* ECD *saranno* ES, SD, *e gli angoli* ECS, DCS *uguali.*

III. Da ciò è manifesto, che questa Rodonea sarà doppia del circolo descritto sopra il diametro EC per qualsivoglia archi ISP doppj degli archi SP; e però sarà la metà del circolo circonscritto: il che è consentaneo a ciò, che si debbe dimostrare generalmente alla Proposizione VIII.

Spiegazione. *Che questa Rodonea sia doppia del circolo descritto sopra il diametro* EC, *che è l'asse della Rodonea, si prova dall' essere qualsivoglia archi* PSI *doppj degli archi* PS. *Poichè la mezza Rodonea* ECI *è composta d'infiniti archi* PSI, *ed il semicircolo* ESC *degl' infiniti archi* PS *metà degli archi* PSI; *e però la somma infinita degli archi* PS *sarà la metà della somma infinita degli archi* PSI; *Ma quella è l'area del semicircolo* ESC, *e questa della Rodonea* EIC *dunque, ec.*

Che poi la Rodonea EIC *sia la metà del circolo circonscritto* EDA *è chiaro, se si considera, che il circolo fatto sopra il diametro* EC, *che è raggio del circolo* EDA, *è la*

la quarta parte del circolo E D A; onde essendo la Rodonea doppia del circolo E S C sarà per conseguenza la metà del circolo circonscitto, così $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$ *cioè essendo il circolo circonscritto E D A = 1 sarà il circolo E S C =* $\frac{1}{4}$ *e però la Rodonea E I C doppia di* $\frac{1}{4}$ *sarà =* $\frac{1}{2}$ *che è la metà di 1 cioè del circolo circonscritto E D A.*

PROPOSIZIONE VI.

Fig. 9.

SE la ragione di a a b sarà la ragione di uguaglianza, si formerà una Rodonea bifolia, che non è altro che un doppio circolo, che abbia un diametro subduplo del diametro del circolo circonscritto alla Rodonea.

Imperocchè il ramo C I della Rodonea, debbe in questo caso uguagliarsi al seno dell' arco scorso A D; onde C I sarà sempre uguale a D H, e congiunta F I, saranno i lati C D, D H uguali a i lati F C, C I, posti circa gli angoli alterni uguali C D H, F C I delle paralelle F C, D H; onde ancora l'angolo F I C si uguaglia al retto C H D, e però il punto I apparterrà ad un semicircolo descritto sopra il diametro F C, e quindi il doppio circolo F I C, C G V descritto circa i diametri F C, C V sarà il luogo di tali rami, che rispondono ad un intera circolazione, cioè, sarà tutta la Rodonea bifolia; il che ec.

COROLLARIO.

Da ciò è manifesto, che ancora la Rodonea bifolia è la metà del circolo circonscritto, e però eguale alla Rodonea unifolia della precedente Proposizione.

Spiegazione. *Che la Rodonea bifolia sia la metà del circolo circonscritto, è chiaro dall' essere il circolo sopra il raggio F C =* $\frac{1}{4}$ *del circolo K F A V circonscritto; onde il doppio circolo sarà =* $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ *del medesimo circolo.*

SCO-

SCOLIO.

Se la proporzione di a *a* b *sarà come* 1 . *a* 2 , *a* 3 , *a* 4 , *a* 5 , *ec. in infinito, ne verrà per la Proposizione III. una serie infinita, che anderà avanti in progressione aritmetica i di cui termini saranno i numeri delle foglie corrispondenti alle proporzioni date di* a *a* b

Per esempio se averemo a . b : : 1 . 2 , *ne verrà* b = 2 a; *ora per la Proposizione III. come* a *a* 2 b *così* 1 *al numero delle foglie, e facendo* a . 2 b : : 1. $\frac{2b}{a}$, *sarà* $\frac{2b}{a}$ *la formola generale del numero delle foglie; sostituendo dunque in luogo di* b *il suo valore* 2 a, *averemo* $\frac{4a}{a} = 4$ *che sarà il numero ricercato; similmente se* a . b : : 1 . 3 , *sarà* 3 a = b; *onde mettendo in* $\frac{2b}{a}$ *in luogo di* b *il suo valore, averemo* $= \frac{6a}{a}$ $= 6$, *e così seguitando vedremo, che ne verrà una serie infinita in progressione aritmetica, i di cui termini differiscono colla differenza* 2 . *Questa serie averà un' altra serie infinita, che progredisce anch' essa in progressione aritmetica, che le corrisponde, e che proviene dalla proporzione di* a *a* b , *supponendo, che* a *rappresenti l'unità, e* b *i numeri maggiori di un' unità, così*

Serie infinita del numero delle foglie 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20., *ec.*

Serie infinita derivante dalla proporzione di a *a* b , 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10., *ec.*

similmente pe' numeri impari delle foglie si troveranno due serie infinite, così

Numeri delle foglie 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. , *ec.*

Proporzione di a *a* b $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{5}{2}$. $\frac{7}{2}$. $\frac{9}{2}$. $\frac{11}{2}$. $\frac{13}{2}$. $\frac{15}{2}$, *ec.*

Avendo da descrivere una Rodonea di due foglie, se vorremo la proporzione di a *a* b , *basterà vedere nella seconda serie il numero corrispondente* 1 , *e sarà la proporzione di ugualità. Similmente volendo una Rodonea di* 10. *foglie*

glie, la proporzione di a *a* b *doverà esser di* 1 *a* 5, *ec. il che corrisponde a ciò, che si insegna al Corollario primo della Proposizione III.*

Se la proporzione di a *a* b *sarà la conversa della prima, cioè, di maggiore inegualità operando come sopra, averemo* I b . a : : 1 . 1, *e però* $a = b$, *onde mettendo nella formola* $\frac{2b}{a}$ *in vece di* b *il suo valore* a, *ne verrà* $\frac{2a}{a} = 2$ *per lo numero delle foglie. Similmente se sarà* b . a : : 1 . 2 *ne verrà* $a = 2b$, *e però la formola* $\frac{2b}{a} = \frac{2}{2} = 1$. *Se* b . a : : 1 . 3 *sarà* $a = 3b$, *onde* $\frac{2b}{a} = \frac{2b}{3b} = \frac{2}{3}$; *il che fa vedere, che in questa maniera non si può avere la descrizione della Rodonea semplice perfetta, e che l'unifolia è l'ultima, giacchè quest' altre proporzioni danno una frazione di foglia: le quali frazioni però costituiscono un' altra serie infinita di frazioni corrispondenti alla proporzione di* b *ad* a, *che hanno i denominatori che progrediscono nella progressione aritmetica de' numeri naturali, così*

Serie infinita delle frazioni delle foglie delle Rodonee sotto la Rodonea unifolia 1. $\frac{2}{3}.\frac{2}{4}.\frac{2}{5}.\frac{2}{6}.\frac{2}{7}.\frac{2}{8}.\frac{2}{9}.\frac{2}{10}$, *ec.*

Serie infinita corrispondente della proporzione di b *ad* a *di minore inegualità* 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10., *ec.*

PROPOSIZIONE VII.

Fig. 10. e 11.

Qualunque foglia della Rodonea è al quadrante circolare come a *a* b.

Imperocchè tirati i raggi C I D, C *i d* infinitamente vicini, e tirati i seni G H, *g h* corrispondenti a i medesimi, cioè uguali a i rami C I, C *i*, e descritto l'arco concentrico I R, è manifesto, che l'elemento C *i* I della mezza foglia della Rodonea è all' elemento G H *h g* del quadrante, come la metà dell' arco I R ad H *h*; e ciò perchè le basi C *i*, *g h* del triangolo elementare C *i* I, e del rettan-

rettangolo elementare $gbHG$ sono eguali; dunque il doppio di CIi sarà a $GHbg$, com' è l'intera RI ad Hb; cioè a dire nella ragione composta di RI a Dd, di Dd a Gg, e di Gg ad Hb. Ma perchè Gg ad Hb (per la Teoria degl' infinitamente piccoli) è come il raggio Cg al seno gb, cioè come CD a CI, o Dd ad RI, la ragione di Gg ad Hb eliderà l'eguale ragione reciproca di RI a Dd; e però rimane, che la ragione di RI ad Hb sia la medesima, che quella di Dd a Gg. Ma questa è la medesima, che quella di a a b, essendo in tal ragione tanto AD ad AG, che Ad ad Ag, e però ancora i residui Dd, Gg conserveranno la medesima ragione; dunque RI ad Hb, ovvero il doppio dello spazio elementare CIi è nella data ragione di a a b all' elemento del quadrante $GHbg$, e questo succederà sempre; dunque il doppio della foglia CIE, o l'intera foglia della Rodonea sarà al quadrante come a a b, il che, ec.

Spiegazione. *Che lo spazio elementare* CiI *della metà della foglia della Rodonea* EIC *sia all' elemento* $GHhg$ *del quadrante* FCA, *come la metà di* RI *ad* Hh, *è chiaro se si considera, che essendo uguale la base* Ci *del triangolo* CIi, *e la base* hg *del quadrilatero* $GHhg$, *i rettangoli sotto* Ci, RI, *e sotto* gh (Ci), *e* hH *averanno la proporzione di* RI *ad* hH; *e però il triangolo sotto* $Ci \times \frac{1}{2} RI = \frac{1}{2} Ci\, RI$ *sarà a* $gh \times hH$ *come* $\frac{1}{2} RI$ *ad* hH; *cioè il triangolo* CIi *al quadrilatero* $GHhg$ *per esser la differenza delle linee* gh, GH *infinitamente piccola, poichè sono dette linee infinitamente vicine.*

Che poi per la Teoria degl' infinitamente piccoli Gg *sia ad* Hh *come il raggio* Cg *al seno* gh, *è pur manifesto, se ad* Hh *c'immagineremo tirata paralella l'eguale* Gm, *di modo che si formi il triangolo infinitamente piccolo* gGm, *in cui l'angolo* gmG *è retto, e l'angolo* mgG *compimento ad un retto dell' angolo* gGm. *Ma essendo retto l'angolo* CgG, *sarà ancora l'istesso angolo* mgG *compimento ad un retto dell' angolo* Cgh, *e però l'angolo* Cgh *sarà uguale all' angolo* gGm *del triangolo infinitamente piccolo; onde ne verrà che*

gG . Gm (Hh) :: Cg . gh; *cioè come* CD *a* CI *per esser* CD *uguale a* Cg; *e* CI *differendo da* Ci = gh *per la differenza* Ri *infinitamente piccola si può prendere per* Ci = gh

Essendo dunque il doppio dell' elemento CIi *a* GHhg *come l'intera* RI *ad* Hh, *cioè nella composta di* RI *a* dD, *e di* dD *a* gG, *e* gG *ad* Hh. *ovvero* RI . dD . gG . Hh . *ed elidendosi le ragioni* RI . dD, *e* gG . Hh *uguali, e reciproche; sarà la ragione di* RI *ad* Hh *la medesima, che quella di* Dd *a* Gg; *il che è manifesto, se si considera, che se sarà come* RI *ad* hH, *così* Dd *a* gG *mettendo fra* RI *ed* Hh *i due termini* Dd, gG *ne verrà una composizione di* RI *a* Dd, *di* Dd *a* gG, *e di* gG *ad* Hh, *che averanno le proporzioni del primo e secondo termine, e del terzo e quarto uguali e reciproche; e però elidendosi la prima, e l'ultima, resteranno le ragioni uguali* RI . Hh :: Dd . Gg *di prima come meglio in numeri, se* 4 . 6 :: 2 . 3 *mettendo fra* 4 *e* 6, 2 *e* 3 *averemo una proporzione continua* 4 . 2 . 3 . 6, *in cui si elidono le ragioni di* 4 *a* 2, *e di* 3 *a* 6 *per esser uguali e reciproche, e però resteranno sempre le ragioni primiere uguali* 4 . 6 :: 2 . 3; *onde generalmente trovandosi una tal composizione di ragione, sarà sempre come il primo all' ultimo termine così il secondo al terzo, come si è fatto di sopra.*

Che poi essendo il doppio dello spazio elementare CIi *all' elemento del quadrante* GHhg, *come* a *a* b *si deduca, che il doppio ancora della foglia* EIC, *o tutta la foglia della Rodonea sia al quadrante* FCA *come* a *a* b, *si prova di più per le regole del calcolo integrale così*

Sia Ci = y, RI *arco di circolo infinitamente piccolo* = du, *e supponendo* AH = x, *sarà* hH = dx, hg = y. *sarà dunque lo spazio* CiI $= y \times \frac{1}{2}$ du, *e lo spazio* GHhg = y × dx;

e però $y \times \frac{1}{2} du . y \times dx :: \frac{1}{2} du . dx :: \frac{1}{2} a . b$ (*come sopra si è provato*). *Ma il doppio dello spazio* CIC = S . ydu, *è lo spazio* AGH = S . ydx; *dunque sarà* S . ydu . S . ydx :: du . dx :: a . b, *e però per le regole del calcolo integrale il doppio della foglia* EIC *al quadrante* FCA *sarà come* a *a* b

CO-

COROLLARJ.

I. E però la semifoglia CIE sarà al quadrante come $\frac{1}{2}a$ a b, ovvero come a a $2b$.

II. Di più qualsivoglia semmento della Rodonea CI*i* al semmento del circolo A*gb*, è nella medesima ragione di a a $2b$.

Spiegazione. *Ciò dipende dalla nostra dimostrazione data di sopra secondo le regole del calcolo integrale; poichè il semmento* CIiC *essendo sopra la base variabile* Ci[y] *quando questa divenga CE =* I *sarà il semmento CIC l'istesso che la semifoglia CIE; il che valendo per lo spazio AGH rispetto al quadrante AFC, ed essendo CIE ad AFC come* a *a* 2b *pel Corollario primo, saranno ancora i semmenti CIC e AGH come* a *a* 2b*; ovvero essendo la semifoglia CIE ad AFC come* a *a* 2b, *saranno la detta semifoglia CIE, ed il quadrante AFC composti d'infiniti spazi elementarj, che averanno fra loro la ragione di* a *a* 2b*; onde essendo ancora i semmenti indeterminati CIC, AGH composti degl' infiniti spazj suddetti averanno ancor essi la ragione di* a *a* 2b.

PROPOSIZIONE VIII.

Qualunque foglia della Rodonea è la metà del settore circolare ad essa circonscritto; e l'intera Rodonea semplice la metà del circolo, la doppia di due, e la triplice di tre circoli, ec.

Imperocchè per *la precedente* qualunque foglia è al quadrante come a a b; e però al semicircolo, come a a $2b$, e pel Corollario quarto della Proposizione II. il semicircolo è al settore circonscritto alla foglia come b ad a; dunque per l'egualità perturbata qualunque foglia è al settore circonscritto come b a $2b$, cioè nella ragione suddupla; e però tutte le foglie della Rodonea

a tutt

a tutti i settori circonscritti, cioè la Rodonea semplice al circolo, la doppia a' due circoli, la triplice a tre, ec. sarà sempre nell' istessa ragione sudupla.

Spiegazione. *Per intendere bene la ragione di tale ugualità perturbata, sieno rappresentate le quantità suddette per le lettere iniziali così F = foglia, S = semicircolo, s = settore, e sarà F.S.s* b. a. 2 b; *e però come F ad S, così* a *a* 2 b, *e come S ad* s, *così* b *ad* a; *dunque per l'ugualità perturbata sarà F ad* s *come* b *a* 2 b, *cioè la foglia al settore nella ragione di 1 a 2.*

Altramente il numero delle foglie per la Proposizione III. è all' unità, e però l'istessa Rodonea [se è semplice] ad una foglia, come 2 *b* ad *a*; ma per la precedente, qualunque foglia è al quadrante del circolo circonscritto come *a* a *b*; dunque la Rodonea semplice è al quadrante del circolo come 2 *b* a *b*, cioè nella ragione doppia, e però la semplice Rodonea è uguale al semicircolo: ed un simile discorso si può applicare alle Rodonee doppie e triplici; imperocchè in quelle il numero delle foglie è all' unità come 4 *b* ad *a*, ed in queste come 6 *b* ad *a*, ec.

Spiegazione. *Nelle Rodonee doppie il numero delle foglie è all' unità come* 4 b *ad* a; *per ciò, che si deduce dal Corollario secondo della Proposizione III. cioè, il numero delle foglie è ad una foglia come* 4 b *ad* a; *ma per la Proposizione VII. qualunque foglia è al quadrante del circolo circonscritto come* a *a* b, *dunque per l'ugualità ordinata il numero delle foglie è al quadrante del circolo come* 4 b *a* b; *cioè quadruplo di un quadrante, e però uguale al circolo e sudduplo di 2 circoli. Similmente essendo nelle Rodonee triple il numero delle foglie ad una foglia come* 6 b *ad* a, *e questa al quadrante del circolo come* a *a* b, *per la precedente, sarà come sopra il numero delle foglie della triplice Rodonea al quadrante nella proporzione sestupla; e però al circolo come 6. a 4, ed a tre circoli come 6 a 12, cioè suddupla.*

co-

COROLLARJ.

I. Qualsivoglia Rodonea semplice è uguale a qualsivoglia semplice Rodonea inscritta nel medesimo circolo, abbia quel numero che vorremo di foglie; giacchè è sempre uguale allo spazio del medesimo semicircolo *per la precedente*.

II. Di più qualsivoglia Rodonea doppia sarà uguale a qualsivoglia Rodonea doppia, e qualsivoglia triplice a qualsivoglia triplice per la medesima ragione; giacchè la prima specie è sempre uguale al circolo, e la seconda ad un circolo e mezzo; e così si discorra degli altri. Si avverta però, che nella doppia, o triplice Rodonea bisogna computare gli spazj delle foglie, che si sovrappongono l'una all' altra, come se fossero distinti.

Spiegazione. *Che la Rodonea doppia nel senzo del presente Corollario sia uguale al circolo in cui è inscritta, si deduce dalla spiegazione della seconda dimostrazione della Proposizione VIII., giacchè in questo supposto è l'istesso la Rodonea doppia, che il numero delle foglie della medesima; che poi la triplice nel medesimo supposto sia uguale ad un circolo e mezzo, è chiaro se si considera, che per la detta spiegazione sarà ad un circolo come 6 a 4, e però ad un circolo e mezzo, come 6 a 6, cioè uguale.*

SCOLIO.

Quì ancora nel paragone di tutta la Rodonea al circolo, come si è detto nello Scolio della Proposizione III. si suppone, che ogni settore comprenda la sua foglia distinta della Rodonea, e che non rimangano alcuni settori intermedj voti; o che le foglie si sovrappongano l'una all' altra nella stessa descrizione, quando non è ancora compita una perfetta circolazione. Imperocchè se s'interpongano alternativamente alle foglie della Rodonea de' settori di circolo voti; è manifesto che tali semplici Rodonee saranno uguali ad un quadrante di circolo,

colo. Che se nella medesima descrizione ciascheduna foglia pervenga alla medesima parte, con esser sovrapposta l'una all'altra con una simile porzione, tutta la Rodonea, che gode un numero pari di foglie, computate le porzioni delle foglie sovrapposte, si adeguerà ad un circolo intero. Imperocchè (*fig.* 26. *e* 27.) le foglie prese alternativamente NLCB, EFCD, KGCI, che sono descritte in settori distinti, che comprendono tutto il circolo, sono uguali alla metà del circolo, per esser qualunque foglia la metà del suo settore, per la Proposizione VIII. Nell'istesso modo l'altre foglie, che sono altrettante alle prime, sono uguali all'altra metà del circolo; dunque tutte insieme sono uguali a tutto il circolo.

Quando però la Rodonea è composta di un numero impari di foglie (giacchè allora per quello, che si è detto nello Scolio della Proposizione III. tanto b, che a è un numero impari) il di lei spazio è al circolo come a al quadernario, computati però i semmenti sovrapposti, come se fossero distinti. Imperocchè qualunque foglia è al quadrante come a a b; ma il numero delle foglie è uguale a b; dunque l'intera Rodonea è al quadrante come ab a b, cioè come a ad 1; di maniera che sia uguale a tanti quadranti, quanti ne indica il numero a; e però al circolo medesimo è come a a 4.

Spiegazione. *Se s'interpongano alternativamente alle foglie della Rodonea de' settori di circolo voti; è manifesto, che tali semplici Rodonee saranno uguali ad un quadrante di circolo: e ciò perchè per la Proposizione VIII. una Rodonea semplice, che abbia tutti i settori del circolo circonscritto contenenti le sue foglie, è la metà del circolo; dunque questa, che ha alternativamente tanti settori voti, quanti pieni, sarà uguale ad un quadrante.*

Quando però la Rodonea è composta di un numero impari di foglie, ec. il di lei spazio è al circolo come a *al quadernario, ec.*

Imperocchè qualunque foglia è al quadrante come a *a* b [*per la Proposizione VII.*]; *ma il numero delle foglie è uguale a* b, *come si prova nello Scolio della Propo-*

posizione

posizione III. verso il fine (essendo un numero impari di foglie pel supposto presente); dunque ancora a *sarà uguale ad una foglia ; e però moltiplicando* a *per* b *ne verrà la somma delle foglie, che compongono la Rodonea, e quindi la Rodonea sarà al quadrante, come* a b *a* b; *cioè come* a *ad* 1, [*per esser* a b . b : : a . 1] *dunque al circolo medesimo sarà come* a *a* 4; *il che, ec.*

PROPOSIZIONE IX.

Avendo segato in due parti uguali l'angolo E C *A, che contiene l'asse della foglia della Rodonea con la tangente* C *A ; e descritto per mezzo della retta* C D, *che taglia la Rodonea in* I *col raggio* C I *l'arco circolare* I S K, *sarà la Lunula* K E I *quadrabile ; cioè sarà al quadrato del raggio come* a *a* 4 b. Fig. 12.

Imperocchè essendo il quadrante A F della periferia all' arco A E, come A G [il di cui seno G H è uguale a C I] ad A D, che è la metà di A E, sarà A G la metà del quadrante. Dunque il quadrato del raggio C G, o C D, sarà il doppio del quadrato del seno G H, o del ramo C I; e però il settore S C I è al settore E C D simile come 1 a 2; ma il settore E C D è al settore F C G come *a* a *b*; [imperocchè questa è la ragione degli archi E A, F A, e degli ablati D A, G A, e però de' residui D E, G F] dunque exæquo il settore S C I sarà al settore FCG come *a* a 2 *b*, cioè come la semifoglia C I E al quadrante F G A C; ovvero come il semmento della Rodonea C V I al semmento circolare G A H, o come il residuo C E I C al residuo F G H C; onde ancora il residuo S E I della semifoglia è al residuo triangolo C H G, o tutta la lunula S I E K al quadrato C H G T sarà nella medesima ragione di *a* a 2 *b* ; e però sarà al quadrato del raggio C G, che è doppio del predetto quadrato, come *a* a 4 *b* ; il che, ec.

Spiegazione. *Che il quadrante* A F *della periferia sia all' arco* A E, *come* A G (*il di cui seno* G H *è uguale a* C I)

ad AD, che è la metà di AE, si prova nella Proposizione II., e che AD sia la metà di AE, ciò viene dal supposto della presente Proposizione, che l'angolo ECA sia segato in mezzo dalla linea CD; e che AG sia la metà del quadrante, si deduce da questa proporzione, cioè AF. AE:: AG. AD ($\frac{1}{2}$ *AE) e però necessariamente ne verrà AF. AE:: AG* ($\frac{1}{2}$ *AF). AD* ($\frac{1}{2}$ *AE).*

Dunque il quadrato del raggio CG, o CD, sarà il doppio del quadrato del seno GH, o del ramo CI; il che è manifesto dall' esser l'angolo GCA semiretto; e però il triangolo CHG isocele: onde essendo uguali i quadrati di CH, GH sarà il quadrato CG doppio di uno di loro, cioè del quadrato del seno GH, o del ramo CI

E però il settore SCI è al settore ECD simile come 1. *a* 2; *Poichè essendo il settore SCI al settore ECD, come il quadrato di CI (CS) al quadrato di CE, ed essendosi provato* $\overline{CS}^2 = \frac{1}{2}\,\overline{CE}^2$ *sarà il settore SCI al settore ECD, come* $\frac{1}{2}$ *a* 1, *o come* 1 *a* 2.

Ma il settore ECD è al settore FCG, come a *a* b; *il che si prova ancora per questa ragione, che per la Proposizione prima EA sarà ad FA, come* a *a* b; *dunque ancora ED* ($\frac{1}{2}$ *EA) sarà ad FG* ($\frac{1}{2}$ *FA), come* a *a* b; *e però il settore ECD al settore FCG, come* a *a* b, *per essere i detti settori sotto la medesima altezza CE, e però come le loro basi ED, FG.*

Dunque exaquo il settore SCI sarà al settore FCG come a *a* 2b. *Che ciò sia vero, facciasi SCI. ECD. FCG, ed i termini corrispondenti saranno* 1. 2. $\frac{2b}{a}$ [*per essere* a. b :: 2. $\frac{2b}{a}$] *dunque per l'ugualità ordinata sarà SCI. FCG* :: 1. $\frac{2b}{a}$ :: a. 2b

Cioè come la semifoglia CIE al quadrante FGAC; per essere

essere per la Proposizione VIII. tutta la foglia CIEK *al quadrante come* a *a* b, *e però la metà come* $\frac{1}{2}$ a *a* b, *cioè* a *a* 2 b.

O come il semmento della Rodonea CVI *al semmento circolare* GAH *pel Corollario II. della Proposizione VII.*

O come il residuo CEIC *al residuo* FGHC; *cioè come* SCI + SEI *ad* FCG + CGH; *ed essendo* SCI . FCG : : SCI + SEI . FCG + CGH : : a . 2b, *pel detto di sopra, sarà ancora necessariamente* SEI . CGH : : a . 2 b; *il resto è chiaro.*

COROLLARJ.

I. Essendo il numero delle foglie della Rodonea semplice all' unità, e però ancora la somma di tutte le lunule, che taglia l'intera periferia descritta col raggio CI, ad una Lunula KEI, come 2 *b* ad *a*, e l'istessa Lunula al quadrato del raggio come *a* a 4 *b*, per la Proposizione antecedente, è manifesto, che la somma di dette Lunule sarà al quadrato del Raggio come 2 *b* a 4 *b*, cioè suddupla; e però che la somma di tali Lunule adegua il quadrato GHCT inscritto nel quadrante.

Spiegazione. *Che la somma di tutte le Lunule, che taglia l'intera periferia descritta col raggio* CI *sia ad una Lunula* KEI *come* 2 b *ad* a, *è manifesto; perchè quanti sono i settori* KCI *tante sono le foglie* CKSIVC *tagliate dalla circonferenza* KSI; *ma qualsivoglia settore pel Corollario IV. della Proposizione II. è al circolo come* a *a* 2 b; *e V. V. il circolo a qualsivoglia settore, come* 2 b *ad* a; *dunque essendo ancora per la Proposizione III. il numero delle foglie intere alla foglia* CKEIV, *come* 2 b *ad* a, *sarà ancora la somma de' residui, o delle Lunule* KEI *ad una Lunula, come* 2 b *ad* a.

II. Onde la somma delle Lunule tagliate in una Rodonea per mezzo di detta periferia adegua la somma delle Lunule determinate da qualsivoglia altra Rodonea inscritta nel medesimo circolo, e di quante foglie si vuole.

Spiegazione. *Ciò è chiaro, se si considera, che ogni*

ſomma di tali Lunule pel Corollario I. adegua il quadrato GHCT inſcritto nel quadrante.

III. Ed eſſendo tanto la ſemifoglia EIC, che il ſettore ECD, o CDA, la metà del medeſimo ſettore CEA, come ancora il ſettore CSH, ne verrà il ſemmento CVI uguale al trilineo EID, e la ſemilunula ESI uguale al trilineo CVIH, il quale però ſarà ancor eſſo quadrabile, come quelloche ha la data ragione di a a $2b$ al triangolo CGH.

Spiegazione. *Che del medeſimo ſettore ECA ſia la metà, tanto la ſemifoglia EIC, che il ſettore ECD, o CDA, è chiaro, ſe ſi conſidera, che il ſettore ECA è la metà del ſettore, che circonſcrive la foglia CKEI, e però per la Propoſizione VIII. la ſemifoglia CIE ſarà la metà del ſettore ECA, di cui per coſtruzione ſono ancora la metà i ſettori ECD, CDA, come ancora il ſettore CSH; poichè il ſettore CSH al ſettore ECA averà la proporzione, che averà il quadrato del raggio CH al quadrato del raggio CA (CG); il quale ſi è veduto di ſopra, che è la metà del quadrato del raggio CG; onde il ſettore CSH ſarà ancor eſſo la metà del ſettore CEA.*

E però il ſemmento CVI ſarà uguale al trilineo EID; il che è chiaro, poichè la ſemifoglia EIVC eſſendo la metà del ſettore ECA, di cui pure è la metà il ſettore ECD, ſarà però la detta ſemifoglia uguale al ſettore ECD; e levando da dette coſe uguali la comune EICS, reſteranno uguali i ſemmenti CVI, EID

E la ſemilunula ESI uguale al trilineo CVIH; il che ſi proverà come ſopra. Poichè il ſettore CSH, e la ſemifoglia CVIE, eſſendo tutti due la metà del ſettore ECA, ſaranno uguali; e però levando il comune SIVC, reſteranno uguali il trilineo CVIH, e la ſemilunula SEI;

E però il detto trilineo ſarà ancor eſſo quadrabile, come che è al triangolo CGH nella data ragione di a *a* $2b$; *poichè la ſemilunula per quello ſi dimoſtra nella Propoſizione IX. è al triangolo CGH in detta ragione; dunque anche il trilineo CVIH, e però ancor eſſo quadrabile.*

IV. Parimente la ſomma di queſti trilinei in qual-

ſivo-

sivoglia Rodonea sarà della medesima quantità; poichè sempre uguale alla somma delle Lunule della medesima, o di qualunque altra Rodonea semplice inscritta nel medesimo circolo.

V. E però se quegl' interstizj triangolari delle foglie della Rodonea, che sono infrapposti a due fronde, come ICP, KCL, MCN, ec. o le medesime Lunule TEI, PFK, LGM, ec. si computeranno per altrettante foglie, ne nascerà un fiore perfettamente quadrabile. Fig. 13.

SCOLIO.

Non solamente tutta la Lunula [*fig.* 28.], o la sua metà ESI, o il trilineo I*u*CH è capace di un' esatta quadratura; ma qualunque spazio, che sia segato da qualsivoglia raggio CN, o C*n*, che tagli i medesimi a i punti R, V, ovvero *r*, *u*, sarà diviso in parti quadrabili. Imperocchè posta CP uguale a CV, e tirati i seni PM, MQ sarà la semifoglia CIVE al quadrante FCA, come *a* a 2*b* pel Corollario I. della Proposizione VII. Ma la porzione CIV al semmento MAQ è nella medesima ragione pel Corollario II. della Proposizione VII.; dunque la porzione residua ECV della Rodonea sarà nella medesima ragione alla zona residua FMCQ del quadrante. Ma ancora il settore SCR ha la medesima ragione al settore FCM, cioè di *a* a 2*b* [imperocchè SCR è nella ragione suddupla ad ECN, cioè di *a* a 2*a*; ed ECN ad FCM come EN ad FM, o EA ad FA, ovvero AN ad AM, cioè di *a* a *b*, o di 2*a* a 2*b*]; dunque il residuo ESRV al residuo triangolo CMQ averà l'istessa ragione.

Spiegazione. *Imperocchè SCR è nella ragione suddupla ad ECN, cioè di* a *a* 2a, *ed ECN ad FCM come EN ad FM, o EA ad FA, ovvero AN ad AM, ec. Ciò accade, poichè EN, FM sono i residui di NA, MA sottratti da EA, FA: i quali tutti per quello, che si dimostra nella II. Proposizione, sono come* a *a* b, *o* 2a *a* 2b; *dunque SCR al settore FCM per l'egualità ordinata è come*

me a *a* 2b, *essendo SCR. ECN. FCM* [a . 2a . 2b]

Similmente essendo segato il trilineo C*u* I H dalla retta C*r* (CR) ne i punti *u*, *r*, la porzione *u*I*r* sarà quadrabile. Imperocchè fatto C*p* uguale a C*u*, e compito il rettangolo C*pmq*, sarà il settore C*r*H al settore C*m*A, come *a* a 2*b*; essendochè C*r*H a C*n*A, è come *a* a 2*a*, e C*n*A a C*m*A, come *a* a *b*, o 2*a* a 2*b*; onde essendo ancora il semmento della Rodonea C*u* al semmento circolare *mq*A nella medesima ragione pel Corollario II. della Proposizione VII., ancora il quadrilineo interposto tra la curva C*u*, l'arco *r*H, e le rette *ur*, CH sarà al triangolo C*mq* nella medesima ragione di *a* a 2*b*.

Spiegazione. *Che* CrH *a* Cn *A sia come* a *a* 2a, *si deduce da ciò che si prova alla Proposizione IX. e sua spiegazione; e che* Cn*A sia a* Cm*A come* a *a* b, *o come* 2a *a* 2b, *si deduce da questo, che essendo* Cp (mq) *fatto uguale al ramo* Cu, *sarà per natura della Rodonea*, n*A ad* m*A*, *come* a *a* b; *ma come* n*A ad* m*A*, *così il settore* nC*A al settore* mC*A*; *e però averemo* CrH. Cn*A*. Cm*A* | a. 2a. 2b, *cioè per l'ugualità ordinata*, CrH. Cm*A* :: a . 2b

E però l'uno e l'altro trilineo VRI, *ur*I saranno ancor essi quadrabili, e saranno l'istessi trilinei fra di loro uguali, e però ancora i quadrilinei EVRS, C*ur*H saranno uguali fra di loro, essendo le rette CV, C*u* separate dall' una e l'altra parte dalla retta CI con angolo uguale; ovvero essendo i quadrati delle rette CV, C*u* presi insieme uguali al quadrato del raggio CF. Imperocchè per gli archi EN, A*n* uguali, ancora gli archi FM, A*m*, che sono a i primi nella data ragione di *b* ad a, saranno uguali, e sara PM uguale ad *mq*, e PC uguale a C*q*; dunque i quadrilinei ESRV, C*ur*H, che a i triangoli uguali sono nella data ragione di *a* a 2*b*, parimente saranno uguali fra di loro, e conseguentemente ancora i trilinei RVI, *ru*I saranno uguali.

Spiegazione. *E però l'uno, e l'altro trilineo VRI*, urI *sarà quadrabile; il che in primo luogo pel trilineo* urI *si prova così. Il settore* ICH *sarà al settore* GC*A*, *per quello*

si è

si è provato di sopra, come a *a* 2 b; *ma similmente pel Corollario II. della Proposizione VII., il semmento* C u *I della Rodonea è al semmento circolare GHA come* a *a* 2b; *dunque sarà ancora il residuo* C u *IH al residuo semmento circolare* C *GH, come* a *a* 2 b, *e però quadrabile. Ma si è ancora provato di sopra quadrabile il quadrilineo* C u r *H, come che al triangolo* C m q *nella medesima ragione di* a *a* 2 b; *dunque levato questo dal noto trilineo* C u *IH resterà noto il trilineo* u *I* r

Che poi i quadrati delle rette CV, C u *presi insieme sieno uguali al quadrato del raggio CF, si prova ancora così, per natura della Rodonea essendo AN ad AM, come* a *a* b, *sarà CV uguale ad MQ; dunque ancora* C u *a PM giacchè* $\overline{MQ}^2 (\overline{PC}^2) + \overline{PM}^2 = \overline{CF}^2$, *e però* $\overline{CV}^2 + \overline{Cu}^2 = \overline{CF}^2$

Dunque i quadrilinei ESRV, C u r *H, che agli uguali triangoli* C *MQ,* C m q *sono nella data ragione di* a *a* 2 b, *sono tra di loro uguali. Poichè si è provato di sopra nello Scholio presente, che il quadrilineo ESRV è al triangolo* C *MQ come* a *a* 2 b; *similmente il quadrilineo* C u r *H al triangolo* C m q *si è provato esser come* a *a* 2 b; *ed essendosi provato nel presente Scolio che PM* = m q, *e PC* = C q *si proverà, che il triangolo rettangolo* C m q *è uguale al triangolo rettangolo CMQ, e però avendo il quadrilineo ESRV al triangolo CMQ, ed il quadrilineo* C u r H *triangolo* C m q = C *MQ l'istessa ragione di* a *a* 2 b, *saranno i detti quadrilinei uguali fra di loro.*

E conseguentemente saranno ancora uguali i trilinei RVI, r u *I; il che si prova così: Pel Corollario III. della presente Proposizione la semilunula SEI è uguale al Trilineo* C u *IH; dunque levando gli uguali SEVR,* C u r *H dagli uguali SEI, CIH resteranno uguali i trilinei RVI,* r u *I.*

Da ciò si deduce, che potranno rendersi quadrabili molte altre parti delle Rodonee. Imperocchè se dalla semifoglia si taglino due semmenti da quei rami, de' quali i quadrati presi assieme si uguaglino al quadrato del Raggio, essendo questi a i semmenti circolari corrispon-

ſpondenti, i ſeni de' quali ſiano uguali a i medeſimi rami, nella data ragione di *a* a 2 *b*; il reſiduo della ſemifoglia ſarà al rettangolo inſcritto nel quadrante, che detratti quei ſemiſemmenti circolari rimane al quadrante, nella medeſima ragione data.

Così quando la data ragione di *a* a *b* ſia ſubſequialtera [della quale ſpecie di Rodonea ſi è parlato al fine dello Scolio, dopo la Propoſizione III.] eſſendo le parti delle foglie ſovrappoſte come CQBPC [*fig.* 26.] compoſte da due ſemmenti uguali CQB, CPB, che hanno il ramo CB uguale al ſeno dell' arco del mezzo quadrante, ſe dalla ſemifoglia CQBN ſi levi l'aggregato di quei ſemmenti CQBPC, la reſidua ſemifoglia CPBN ſarà ancor eſſa quadrabile, come, che la terza parte del quadrato inſcritto nel quadrante, e l'intera foglia così diminuita CPBNLOC ſarà la terza parte del quadrato del raggio; e l'intero fiore, che è compoſto da ſei foglie CPBNLOC, CQBAFRC, ec. ſarà quadrabile; cioè uguale al quadrato, che è inſcritto nel medeſimo circolo.

Spiegazione. *Il reſiduo della ſemifoglia ſarà al rettangolo inſcritto nel quadrante, che detratti quei ſemiſemmenti circolari, rimane al quadrante, nella medeſima ragione data.*

Per vedere la generalità di queſta propoſizione baſta conſiderare la figura 28. *dove eſſendo il ſemmento* Cu *al ſemiſemmento circolare* m*Aq*, (*o FMP uguale*) *nella ragione di* a *a* 2b; *e ſimilmente il ſemmento CIV al ſemiſemmento circolare MAQ come* a *a* 2b; *detratti dalla Rodonea i ſemmenti* Cu, *e CIV preſi inſieme, e dal quadrante i ſemmenti ſemicircolari FPM, ed MAQ, ſarà il reſiduo della Rodonea, cioè quello, che rimane alla medeſima dopo la ſottrazione del ſemmento CIV + il ſemmento* Cu *al reſiduo rettangolo PMQC nella data ragione di* a *a* 2b; *il che meglio appariſce nella Rodonea ſubſeſquialtera.*

Eſſendo le parti delle foglie ſovrappoſte come CQBPC [fig. 26] *compoſte da' ſemmenti uguali CQB, CPB, che hanno*

hanno il ramo C B *uguale al seno dell' arco del mezzo quadrante, ec. ciò è chiaro dalla Proposizione* IX.*, in cui si prova che* G H (fig. 12.) *uguale a* C I *è il seno della metà del quadrante, cioè di* G C A.

Se dalla semifoglia C Q B N *si levi l'aggregato di quei semmenti* C Q B P C*, la residua semifoglia* C P B N *sarà ancor essa quadrabile, appunto come la terza parte del quadrato inscritto nel quadrante.*

Si deduce da questo, che essendo a *a* b *come* 1 *a* $\frac{3}{2}$*, o come* 2 *a* 3*; ed essendo pel detto di sopra ciascheduno de i due semmenti uguali, (che hanno i due quadrati uguali fra di loro* (fig. 28)*, ed uguali al quadrato del raggio* C G) *a i semmenti circolari ed uguali fra di loro, che li corrispondono, come* a *a* 2 b*; anche la residua semifoglia* (fig. 26) C P B N *sarà al residuo quadrato* (fig. 28) T C H G*, come* a *a* 2 b*, cioè come* 2 *a* 6*; che però sarà* $\frac{1}{3}$ *del quadrato suddetto.*

E l'intero fiore, che è composto delle sei foglie C P B N L O C*,* C Q B A F R C*, ec. sarà quadrabile, cioè uguale al quadrato, che è inscritto nel medesimo circolo.*

Si prova; poichè essendo la semifoglia $\frac{1}{3}$ *del quadrato inscritto nel quadrante, sarà la foglia intera* $\frac{2}{3}$ *del medesimo, e* 6 *foglie suddette* $\frac{12}{3}$*; cioè quadruple del medesimo. Ma il quadrato inscritto nel quadrante è la metà del quadrato del raggio; dunque sei foglie saranno doppie del quadrato del raggio, il quale essendo la metà del quadrato inscritto nel circolo, sarà però l'intero fiore uguale al quadrato inscritto nel circolo, e la metà del quadrato del diametro, o circonscritto al circolo.*

Similmente nella Rodonea, che abbia la ragione di 2 a 5, levati i semmenti delle foglie comuni, il fiore che rimane composto di 10 foglie, come (*fig.* 29.) delle foglie C*m*I G D*n*C, C*o*D A B*p*C, ec. adegua il quadrato inscritto nel circolo. Imperocchè il ramo C I

è seno dell' arco, che è ad HF metà di FG come 5 a 2, cioè, come FGK quadrante della periferia nel circolo all' arco GF; e però CI è seno dell' arco del mezzo quadrante: onde qualsivoglia semmenti C*m*I, C*n*D sono a i semisemmenti circolari interposti tra detto seno e l'arco di 45 gradi, come 2 a 10, nella qual ragione è ancora la semifoglia CIG al quadrante, e la somma degli uni, e degli altri semmenti C*q*I, C*m*I alla somma dell' uno e l'altro semisemmento, che rimane nel quadrante, tolto l'inscritto quadrato; e però il restante della semifoglia C*m*IG è al quadrato inscritto nel quadrante, o l'area C*m*IGD*n*C al quadrato del raggio nella medesima ragione di 2 a 10, o di 1 a 5. Dunque dieci foglie prese insieme, le quali sono C*m*IGD*n*C, *o* DAB*p*C, saranno doppie del quadrato del raggio, ovvero saranno uguali al quadrato inscritto nel circolo.

Spiegazione. *Imperocchè il ramo CI è il seno dell' arco, che è ad HF metà di FG, come 5 a 2; ciò è chiaro per la natura della Rodonea.*

Cioè come FGK quadrante della periferia del circolo all' arco GF; il che si dimostra nella Proposizione IX.

E però CI è seno dell' arco del mezzo quadrante; Imperocchè, come si è veduto, HF è all' arco, di cui è seno il ramo CI, come 2 a 5; e similmente FG è al quadrante FGK, come 2 a 5; dunque sarà FG.FGK::HF. arco di cui è seno il ramo CI; e però alternando FG.HF:: FGK. arco di cui è seno il ramo CI; Ma FG è doppio di HF, dunque anche FGK è doppio dell' arco, di cui è seno il ramo CI; e però CI è seno dell' arco del mezzo quadrante.

Onde qualsivoglia semmenti CmI, CnD *sono a i semisemmenti circolari interposti tra detto seno è l'arco di 45 gradi come 2 a 10. Ciò è chiaro, perchè essendo la ragione di* a *a* b, *come 2 a 5, ed essendo i suddetti semmenti* CmI, CnD *a i semisemmenti circolari suddetti, come* a *a* 2 b *pel II. Corollario della Proposizione VII., saranno come 2 a 10.*

E però il restante della semifoglia CmIG *è al quadra-*

drato inscritto nel quadrante, o l'area CmIGDnC *è al quadrato del raggio nella medesima ragione di 2 a 10; Poichè si è veduto di sopra, che il quadrato del raggio è doppio del quadrato inscritto nel quadrante; dunque se la semifoglia è al quadrato inscritto nel quadrante come 2 a 10; il doppio della semifoglia sarà al doppio del quadrato inscritto nel quadrante, cioè al quadrato del raggio come 2 a 10, o come 1 a 5.*

Dunque 10 foglie prese insieme, ec. saranno doppie del quadrato del raggio, ovvero saranno uguali al quadrato inscritto nel circolo. Ciò è manifesto da che qualsivoglia delle 10 foglie è al quadrato del raggio, pel detto di sopra, come 1 a 5, e però tutte insieme al detto quadrato come 10 a 5; ed essendo il quadrato inscritto nel circolo doppio del quadrato del raggio, sarà l'intera Rodonea di 10 foglie uguale al quadrato inscritto nel circolo, e però uguale alla Rodonea di 6 foglie (fig. 26) *la di cui proporzione era di 2 a 3.*

Se sarà ancora un' altra Rodonea, la di cui ragione sia di 3 a 4, ne risulterà un fiore elegantissimo così disposto con varie belle sovrapposizioni di parti, che gl' intimi suoi semmenti come (*fig.* 30. *e* 31.) C*sor*C non sieno capaci di quadratura, ma le parti rimanenti ammettano una nota misura. Poichè essendo il ramo CO uguale al seno di gradi 30, ed il ramo CP uguale al seno di gradi 60, di modo che i quadrati dell' uno e dell' altro seno sieno uguali al quadrato del raggio; e però descritto a parte nella Fig. 31 il quadrante FDAC, e diviso in maniera, che sia l'arco AD di gradi 60, ed FD di gradi 30, e tirati i seni DN, DK, che saranno uguali a i rami della Rodonea CI, Co [*fig.* 30.] e la semifoglia EI*os*C sia al quadrante FDAC (*fig.* 31) come *a* a 2*b*; cioè in questo caso come 3 a 8; e la porzione C*so*I [*fig.* 30.] al semmento ADN (*fig.* 31), e la porzione C*so*, ovvero C*s*Q sia nella medesima ragione al semmento FDK [*fig.* 31], ancora l'area rimanente C*s*QEIC [*fig.* 30.] al residuo rettangolo KDNC (*fig.* 31) sarà parimente come 3 ad 8; e perchè (*fig.* 31) segato

in due parti uguali l'arco D A in X, e tirata dal centro C X, che sega in due parti uguali, e ad angolo retto la corda D A in Z, ciascheduno semisemmento A X Z, DXZ, sono uguali al semmento F D K, saranno insieme i semmenti C*so*, C*ro* (*fig.* 30) al semmento D X A [*fig.* 31] nella medesima ragione, in cui il semmento C*so*I al rimanente triangolo A D N, e presi i doppi C*ro*I Q*t*C al rettangolo K D N C nella medesima ragione di 3 a 8; in cui è ancora l'area C*t*Q E I C al detto rettangolo; Onde è manifesto, che C*t*Q I sarà uguale al trilineo E Q I, e la foglia C*t*Q I *or*C uguale alla foglia E I Q*u*; e che l'uno e l'altro di questi sarà quadrabile, e che la somma di 8 foglie come C*ro*I Q*t*C, ovvero di 8 E I Q*u* sarà tripla del rettangolo K D N C, come che sia al medesimo nella ragione di 24 ad 8, e però la somma di tutte insieme tali foglie C*ro*I E*u*Q*t*C, che compiscono il fiore, sarà uguale all' esagono inscritto nel medesimo circolo.

Spiegazione. *Se sarà ancora un' altra Rodonea la di cui ragione sia di 3 a 4, ne risulterà un fiore elegantissimo così disposto con varie belle soprapposizioni di parti, ec.*

Quì cade in acconcio il dimostrare per qual causa quando la ragione della Rodonea è di 2 a 5, o di 1 a $\frac{5}{2}$, di 3 a 4, o di 1 a $\frac{4}{3}$, le foglie sieno sovrapposte due o tre volte l'una all' altra, come suppone il nostro Autore. Poichè per la prima ragione di 2 a 5 sarà la ragione di una foglia a tutte le foglie di una Rodonea di 2 a 10; e però ne verrà come 10 a 2 così 360 a 72, che sarà l'arco, che doverebbe corrispondere ad una foglia, se fosse la Rodonea semplice, onde multiplicando per 10, numero delle foglie ne verranno 720 gradi per tutto il circolo, che divisi per 360 daranno due: dunque essendo la ragione di 2 a 5 ad un numero impari, averà la Rodonea due foglie sovrapposte una all' altra; [per quello che si è detto allo Scolio della Proposizione III.] e così saranno doppie foglie, benchè 10 maggiori, e 10 minori, uguali le maggiori, e le minori fra di loro

loro, e però la Rodonea sarà doppia. Così essendo la proporzione di 3 a 4, se si farà di 3 a 8 pel numero delle foglie, e poi si dica come 8 a 3, così 360 a 135, quale dovrebbe corrispondere al settore, che comprende una foglia, se la Rodonea fosse semplice, e però multiplicati per 8 quante sono le foglie prime della Rodonea, darebbe 1080 gradi, i quali partiti per 360 danno tre: sicchè le foglie di questa Rodonea sono sovrapposte tre volte l'una all' altra [come alla fig. 30], ed essendo la proporzione di 3 a 4 di un numero impari, (per lo Scolio suddetto) non saranno le foglie sovrapposte totalmente, ma in parte come a detta figura 30 si vede.

Poichè essendo il ramo CO uguale al seno di gradi 30, ed il ramo CP uguale al seno di gradi 60, ec. ciò deriva dalla proporzione di 3 a 4, che darà 8 foglie; onde dividendo 360 per 8, ne verrà per l'arco, che corrisponde a qualunque foglia, 45, che sarà la metà del quadrante, come l'arco RA o FR (fig. 30), e però la sua metà sarà gradi 22 $\frac{1}{2}$, cioè l'arco RG; ma questo per natura della Rodonea debbe essere all' arco il di cui seno è uguale a Co come 3 a 4. Se dunque faremo come 3 a 4 così 22 $\frac{1}{2}$ ad un quarto ne verrà l'arco di 30 gradi, che averà il seno uguale a Co. Similmente come 3 a 4, così l'arco AR di 45 gradi all' arco, il di cui seno è uguale a CP; sarà questo di gradi 60, onde CP sarà uguale al seno di gradi 60.

Onde è manifesto che CtQI sarà uguale al trilineo EQI; poichè si è provato di sopra, che il semmento CroIQtC è uguale all' area CtQEIC, e però levando il comune CtQI, resteranno uguali CroI, ed EQI; ma CroI= CtQI [come è manifesto dalla costruzione della figura], dunque sarà CtQI= EQI, e la foglia CtQIorC uguale alla foglia EIQu, cioè il doppio di CtQI = al dopppio di EQI; e l'uno e l'altro di questi sarà quadrabile; poichè essendo la foglia CtQIorC al rettangolo KDCN nella data ragione di 3 a 8, sarà ancora l'uguale EIQu nella detta ragione al medesimo rettangolo.

E però

E però la somma di tutte insieme tali foglie C r o I E u Q t C, che compiscono il fiore, sarà uguale all' esagono inscritto nel medesimo circolo.

Ciò è manifesto; tali foglie quadrabili prese insieme sono il doppio delle 8 C r o I Q t C, [come si è veduto di sopra] che sono triple del rettangolo K D N C, e però saranno sestuple del medesimo; ma è manifesto, che l'esagono inscritto nel medesimo circolo è sestuplo del rettangolo K D N C [per essere i 6 triangoli D C A (fig. 31), che compongono l'esagono, uguali ognuno di loro al medesimo rettangolo]; dunque, ec.

Di nuovo essendo il settore E C G di 45 gradi, e [*fig.* 31] D C A di gradi 60, quello è a questo come 3 a 4, cioè nella ragione di *a* a *b*, e la sua metà E C R a D C A, o ad F C X come *a* a 2*b*, cioè come 3 ad 8; nella qual ragione essendo C *s o* I al semmento D N A, come ancora C *s o* I E, al quadrante F A C, e però ancora lo spazio E C I interposto fra due rami della Rodonea alla zona circolare F D N C, ovvero all' area uguale a quella F C Z D per essere il triangolo D C Z uguale al triangolo D C N, è chiaro che ancora il rimanente I E R sarà al rimanente D Z X nella medesima ragione di 3 a 8, conforme il semmento della Rodonea C *s o* è nella medesima ragione all' uguale semmento F D K; e però C *s o* sarà uguale ad E I R, e C *s o r* C, ad E R G I; ed aggiunti l'uguali C *r o* I Q *t* C, *u* E I Q, diverranno C *t* Q I *o s* C, ed *u* E R G I Q, o Q I E Z *u* Q fra di loro uguali; onde l'area C *t* Q *u* Z F E I *o s* C sarà divisa in due parti eguali dall' arco della Rodonea Q I.

Si potrebbe ancora concepire nella medesima Rodonea un fiore formato da 4 foglie a guisa di un giglio, come è C *t* Q *u* E I G P *o r* C, ciascheduna delle quali è composta da tre foglie quadrabili C *t* Q I *o r* C, *u* E I Q, ed *o* I G P unite insieme, e però sono al rettangolo KDNC come 9 ad 8, e tutte 4 insieme quelle foglie, che formano un giglio, cioè l'intero fiore, o la croce gigliata sarà all' esagono, inscritto nel circolo, (che è sestuplo del

del rettangolo KDNC, ovvero dell' uguale triangolo DCA) come 36 a 48, cioè, come 3 a 4, che è la ragione di a a b della Rodonea.

Spiegazione. *E però sono al rettangolo KDNC come 9 ad 8; ciò procede perchè, come si è veduto di sopra, ciascheduna di dette foglie è al suddetto rettangolo come 3 ad 8, onde multiplicando 3 per 3, saranno tutte tre insieme, come 9 ad 8; il resto è chiaro.*

PROPOSIZIONE X.

A Qualunque punto I della Rodonea (fig. 14 e 15) tirare una Tangente.

Sia fatto; e tirata dal centro C al ramo I C la perpendicolare CM, convenga con la tangente I M al punto M, e col raggio CI si descriva l'arco I R infinitamente piccolo fino all' altro ramo C i infinitamente vicino, e sieno a i rami CI, Ci uguali i seni GH, g h, e la tangente GL del circolo tagli il diametro in L. Sarà dunque iC a CM come i R ad RI; cioè nella ragione composta da iR, ovvero gO ad OG [cioè g h, o iC ad hL], e di OG, o Hh ad RI (ovvero di b ad a per la Proposizione VII.), onde iC a CM sarà nella ragion composta di iC ad hL, e di b ad a. Ma la medesima ragione è composta ancora da iC ad hL, e di hL a CM, dunque necessariamente la ragione di hL, o HL a CM doverà essere uguale alla data ragione di b ad a; se dunque si farà come b ad a, così la suttangente HL del circolo a CM perpendicolare al ramo CI; tirata MI toccherà questa la Rodonea al dato punto I.

COROLLARJ.

I. Se sarà come a a b, così CH a CN perpendicolare al ramo, tirata NI sarà questa perpendicolare alla curva della Rodonea. Imperocchè essendo HL a CM come

come *b* ad *a*, e CH a CN come *a* a *b*, farà HL a CM reciprocamente come CN a CH; e però il rettangolo MCN farà uguale al rettangolo LHC, ovvero al quadrato di GH, cioè al quadrato del ramo CI; onde tirata NI farà l'angolo MIN retto, e però NI farà perpendicolare alla curva Rodonea nel punto I.

Spiegazione. *Da ciò si deduce un' altra maniera di tirare una tangente al punto I della Rodonea. Imperocchè pel Corollario I. si faccia come* a a b, *così CH a CN con porre CN prolungato indefinitamente in M perpendicolare ad IC, e facendo come CN a CI, così CI a CM, farà CM la suttangente pel detto nel medesimo Corollario; e però tirata dal punto M ad I una linea, farà questa la tangente al punto I della Rodonea.*

II. E' manifesto, che le tangenti degli angoli CIM, LGH, o GCA sempre faranno nella data ragione di *a* a *b*

Spiegazione. *Poichè essendo GH = CI per costruzione, presa l'una o l'altra per raggio o seno totale, farà HL tangente dell' angolo LGH, e CM tangente dell' angolo CIM; sicchè essendosi dimostrato nella Proposizione X. HL.CM::* b.a *è manifesto esser sempre le tangenti di detti angoli nella data ragione.*

PROPOSIZIONE XI.

SE *farà come* b *ad* a, *così il raggio AC a CQ* (fig. 16 e 17), *e co' semiassi FC e CQ si descriva un quadrante di Elisse FVQ, farà il di lui perimetro curvo uguale al perimetro della mezza foglia della Rodonea EIC, e le parti di esse alle parti corrispondenti.*

Imperocchè farà da per tutto ancora GP ad VP, o *gp* ad *up* nella medesima ragione di AC a CQ, cioè di *b* ad *a*; onde ancora le residue differenze dell' ordinate infinitamente prossime, cioè GO, VX nella medesima ragione; Ma è IR ad H*b* o GO per la Proposizione VII. come *a* a *b*, e però come VX alla medesima GO; dunque VX è uguale ad IR. Ma sono ancora uguali

*u*X

*u*X, o *g*O, ed R *i* [per l'ugualtà de' rami co' loro seni]; dunque ancora la suttesa *u*V sarà uguale alla suttesa *i*I, e così ciascheduni elementi di tali curve si mostreranno sempre uguali. Dunque tutto il perimetro curvo della semifoglia della Rodonea sarà uguale al quadrante della curva elittica, e due qualsivoglia foglie della Rodonea si dimostrerà che averanno un perimetro uguale all' intera curva dell' Elisse; il che, ec.

Spiegazione. *Imperocchè sarà ancora da per tutto GP ad VP, o* gp *ad* up *nella medesima ragione di AC a CQ, ec.*

Ciò deriva da una proprietà dell' Elisse, per la quale i quadrati dell' ordinate CQ, PV sono fra di loro come i rettangoli delle parti dell' asse, tagliate da dette ordinate su l'asse [per la Proposizione VI. delle sezioni coniche del nostro Autore] a i quali rettangoli essendo uguali i quadrati dell' ordinate CA, PG del circolo descritto sul medesimo asse, saranno i quadrati dell' ordinate CQ, PV dell' Elisse nella medesima ragione, che i quadrati dell' ordinate CA, PG del circolo, e però CQ.PV::CA.PG; onde CA.CQ::PG.PV. L'istesso più brevemente si deduce dalla Proposizione L. delle sezioni coniche suddette.

Onde ancora le residue differenze dell' ordinate infinitamente prossime, cioè GO, VX nella medesima ragione, ec.: poichè essendo GP ad VP come gp *ad* up *levati da GP, l'ordinata infinitamente vicina* gp *e da PV l'ordinata* pu, *saranno ancora le residue differenze GO, VX nella medesima ragione.*

COROLLARJ.

I. E' manifesto, che la Rodonea è una Elisse ristretta; imperocchè se unendosi nel centro C i punti T, e *t*, l'ordinate VT, *ut* del quadrante elittico se ne vadano in rami, che si allarghino dal centro C, durando la medesima lunghezza della curva FVQ, il quadrante elittico sarà contratto in una semifoglia EIC della Rodonea.

II. Da ciò di nuovo è manifesto, esser la Rodonea la metà del settore circolare circonscritto, Imperocchè

la semifoglia E I C è la metà del quadrante elittico F V Q C, nel quale si stenderebbe, se i rami disciolti dal loro centro divenissero paralelli, e perpendicolari alla medesima retta C Q; come ogni triangolo I C *i* diverebbe il rettangolo V T *t u* doppio di se stesso; ed essendo il quadrante elittico al quadrante circolare come la base Q C alla base C A, cioè come *a* a *b*; nella qual ragione è ancora il settore E C A al medesimo quadrante del circolo C F A per la Proposizione I., è manifesto, che un tal settore sarà uguale al quadrante elittico; e però doppio anche egli della foglia della Rodonea inscritta nel medesimo.

Spiegazione. *Imperocchè la semifoglia EIC è la metà del quadrante elittico F V Q C, ec. come ogni triangolo I C* i *diverebbe il rettangolo V T* t u *doppio di se stesso.*

Ciò procede, che essendo il triangolo I C i *la metà del rettangolo V T* t u, *ed essendo la somma infinita de' triangoli elementarj I C* i *uguale all' area della semifoglia, come ancora la somma infinita de' rettangoli elementarj V T* t u *uguale all' area del quadrante elittico; sarà l'area del quadrante elittico doppia della semifoglia.*

Ed essendo il quadrante elittico al quadrante circolare, come la base Q C alla base C A; sarà ciò chiaro, se si considera, che l'ordinata Q C dell' Elisse è all' ordinata C A del circolo come ogni altra ordinata P V dell' Elisse ad un' altra ordinata P G del circolo, per la Proposizione L. delle sezioni coniche del nostro Autore: ed essendo tanto l'area del quadrante circolare F C A, che l'area del quadrante elittico F C Q, composte d'infinite ordinate perpendicolari al medesimo asse C F; ancora la somma infinita dell' ordinate del quadrante elittico, o il medesimo quadrante F C Q, sarà alla somma infinita dell' ordinate del quadrante circolare, o al medesimo quadrante F C A, come C Q a C A

III. Si raccoglie di più essere uguali i perimetri delle foglie in quelle Rodonee, la ragione delle quali sia reciproca, ed i raggi de' loro circoli si corrispondano nella medesima ragione reciproca. Imperocchè se il raggio C F, o E C (*fig.* 17) sia uguale alla base dell' Elis-

ſe C Q (*fig.* 16) e *v.v.* il raggio C F di queſta foſſe uguale alla baſe C Q dell' altra Eliſſe, è manifeſto, che nell' uno, e nell' altro caſo doverebbe riſultare la medeſima Eliſſe F V Q, come che l'una e l'altra deſcritta da' medeſimi ſemiaſſi, e che ſarà all' una o l'altra iſoperimetra, eſiſtendo nell' una la ragione di *a* a *b*, e nell' altra quella di *b* ad *a*; E. G. ſe la ragione di *a* a *b* ſia ſuddupla, di modo che ſecondo la Propoſizione III. ne provenga una Rodonea di 4 foglie; ma con un raggio ſudduplo, e però uguale alla baſe del quadrante di Eliſſe iſoperimetra; *v. v.* ſi faccia una Rodonea ſecondo la doppia ragione, la quale per la Propoſizione V. diverrebbe unifolia, ſarà queſta iſoperimetra ad una foglia di quella. Imperocchè la baſe del quadrante elittico, che riſponde a queſta, ſarà uguale al raggio del circolo, che appartiene a quella, e però la medeſima curva elittica ſarà uguale alla foglia dell' una, o dell' altra.

Spiegazione. *Eſiſtendo nell' una la ragione di* a *a b*, *e nell' altra quella di* b *ad* a, *ec. poichè come ſi vede nella figura* 16 *la ragione di C Q a C A, è di* a *a* b, *e nella figura* 17 *la ragione di C Q a C A, è di* b *ad* a *per eſſere C F, o C A della figura* 17 *uguale a C Q della figura* 16, *e C F, o C A della figura* 16 *uguale a C Q della figura* 17; *ma C Q della figura* 16 *corriſponde ad* a *come ancora l'uguale C A della figura* 17, *e C A della figura* 16, *come C Q della figura* 17, *a* b; *dunque C Q a C A della figura* 16 *è come* a *a b*, *e C Q a C A della figura* 17, *come* b *ad* a.

Imperocchè la baſe del quadrante elittico, che riſponde a queſta, ſarà uguale al raggio del circolo, che appartiene a quella.

Eſſendo il raggio del circolo della Rodonea tetrafolia, o di 4 foglie ſudduplo del raggio del circolo della Rodonea di una foglia, e però il raggio della prima uguale alla baſe del quadrante elittico corriſpondente alla Rodonea unifolia, e la baſe pure della prima uguale al raggio della ſeconda, ne verrà una medeſima curva elittica, come che formata ſopra i medeſimi aſſi, che averà il perimetro uguale alla foglia dell' una, e dell' altra.

IV. Che se sieno descritte nel medesimo circolo due Rodonee, l'una secondo la ragione di *a* a *b*, e l'altra secondo la reciproca di *b* ad *a*, averanno i perimetri delle loro foglie proporzionali agli antecedenti *a* e *b* delle dette ragioni; imperocchè se si descrivesse nel medesimo circolo una terza Rodonea simile alla prima, al di cui raggio il raggio del primo circolo fosse come *a* a *b*, sarebbe il perimetro della prima al perimetro di questa terza a lei simile nella medesima ragione de' raggi, cioè di *a* a *b*. Ma il perimetro di questa terza pel Corollario precedente, sarebbe uguale al perimetro della seconda Rodonea, come che descritta secondo la ragione reciproca, e con raggi reciprochi; dunque il perimetro della prima al perimetro della seconda è nella medesima ragione di *a* a *b*.

Spiegazione. *Imperocchè se si descrivesse nel medesimo circolo una terza Rodonea simile alla prima, al di cui raggio il raggio del primo circolo fosse come* a *a* b, *sarebbe il Perimetro della prima al Perimetro di questa terza a lei simile nella medesima ragione de' raggi, cioè di* a *a* b; *e ciò perchè essendo simile la prima Rodonea alla terza, sarà nella duplicata ragione de' raggi, e de' Perimetri, cioè del raggio della prima al raggio della terza, e del Perimetro della prima al Perimetro della terza: altramente non sarebbe simile; ma la ragione duplicata di* a *a* b *suppone un' altra ragione di* a *a* b; *dunque essendo i raggi come* a *a* b, *ancora i perimetri saranno come* a *a* b.

SCOLIO.

Se la ragione di a *a* b *sarà ragione di ugualità, CQ sarà uguale a CA, ed il quadrante elittico FQC diverrà il quadrante circolare FAC, e per la Proposizione XI. sarà la periferia della semifoglia uguale alla periferia del quadrante circolare; ed essendo in questo caso la semifoglia FIC* [fig. 9] *un semicircolo descritto sopra il raggio F C del quadrante FAC, sarà per conseguenza la periferia FIC del semicircolo descritto sopra il raggio FC del*

del quadrante uguale alla periferia F D A; il che si prova ancora pel seguente Lemma.

Se sopra il raggio F C (fig. 9 *) del quadrante F A C si descriva il semicircolo F I C, dico che la periferia del semicircolo F I C sarà uguale alla periferia del quadrante F D A.*

Imperocchè essendo il circolo F I C F, ed il circolo F A V K F come i quadrati de' loro diametri F C, F V, ed essendo F C $\frac{1}{2}$ di F V, cioè come 1 a 2, sarà il quadrato di F C al quadrato di F V come 1 a 4 per essere nella duplicata ragione de' lati; e però il circolo F I C F al circolo F A V K F, come 1 a 4. Ma i circoli sono nella duplicata de' loro diametri, ed i diametri come le loro periferie; dunque la periferia del circolo F I C F sarà la metà della periferia del circolo F A V K F, e però ancora la periferia F I C metà della periferia F A V; onde uguale alla periferia F D A. Il che più brevemente; se dal punto C fino al centro del piccolo circolo C V G si tiri un arco simile, e paralello ad A V, essendo A V un quadrante, sarà ancora il detto arco un quadrante del circolo C V G, o dell' uguale F I C, che essendo ad V A, come la metà di C V a C V, sarà la metà di V A, onde tutta la semiperiferia C V, o F I C sarà eguale ad V A ed F A.

Ciò che fa vedere, che deducendosi ancora questo dalla Proposizione XI. del nostro Autore provata principalmente per tutte le proporzioni di a *a* b *per mezzo degli elementi infinitamente piccoli; l'istessa verità resta da esso provata per un metodo più generale, e però ciò dimostra la giustezza del detto discorso.*

PRO-

PROPOSIZIONE XII.

T*Agliare una Rodonea, che sia di una data ragione di* a *a* b *di minore inegualità da una superficie conica.*

Fig. 18.

Si faccia come *a* a *b*, così il raggio della base NB al lato NC del cono retto NCK, della di cui base il raggio BF sia perpendicolare al diametro NK, che sia a BR come *b* ad *a* e, circa i diametri BR, e BF si descrivano i semicircoli BLR, BSF, i quali seghi qualsivoglia raggio BG ne' punti L, S, e sia GH perpendicolare al diametro NK; se essendo innalzata una superficie cilindrica sopra il circolo BLR s'intenda segare una superficie conica nella comune sezione CIE; sarà questa distesa in un piano, la Rodonea della proposta ragione.

Imperocchè le comuni ferzioni di una tale superficie cilindrica co' piani de' triangoli CBG, CBF, che passano per l'asse, saranno le rette LI, RE paralelle all' asse CB; e però tanto CI a BL, che CE a BR saranno come il lato del cono al raggio della base, cioè [per costruzione] come *b* ad *a*, ovvero come FB a BR, o SB a BL; e però CE sarà uguale a BF, e CI a BS, cioè al seno GH; Ma distesa la superficie conica in un settore piano circolare uguale alla medesima, e descritto col raggio CN, il suo angolo piano NCG sarà sotteso dall' arco uguale ad NG, a cui nella base del cono corrisponde l'angolo NBG; e però come BN ad NC, ovvero come *a* a *b*, così sarà l'angolo NCG all' angolo NBG al di cui seno GH è uguale, come si è veduto il ramo CI della foglia CIE, che ha ancora il massimo ramo CE uguale al raggio BF dalla base del circolo; dunque l'istessa foglia è una foglia della Rodonea descritta nella data ragione di *a* a *b*; il che, ec.

Spiegazione. *E però tanto CI a BL, che CE a BR, saranno come il lato del cono al raggio della base.*

Ciò proviene; che essendo IL paralello all' asse della base

base, taglierà nel punto I la superficie comica di maniera che il circolo, che passa per I, sia uguale al circolo formato dal raggio BL, come pure l'istesso si dica del circolo formato al punto E col raggio BR. Ma questi circoli sono basi di coni simili al cono grande CNFK; dunque tanto CI lato di un cono al raggio BL, che CE lato di un altro cono al raggio BR, saranno come il lato del cono CN al raggio della base BN.

Ovvero come FB a BR, o SB a BL; che FB sia a BR come b *ad* a, *cioè viene dalla costruzione; che poi SB sia a BL come FB a BR si prova; Immaginandosi tirate le rette LR, SF saranno gli angoli ne' semicircoli BLR, BSF retti, e però le corde LR, SF paralelle, ed i triangoli BLR, BSF simili, onde sarà, come FB a BR, così BS a BL.*

Che BS sia uguale al seno GH, si prova così; ne' triangoli HBG, SFB gli angoli GHB, BSF sono retti, e gli alterni HGB = SBF, ed il raggio BG = BF, dunque anche i lati HG, e BS saranno uguali.

E però come BN ad NC, ovvero come a *a* b, *così sarà l'angolo NCG all' angolo NBG.*

L'asserto suddetto si prova così; come BN a BA, o NC per costruzione, così NG ad AE; ma NG contiene tanti gradi quanti ne contiene AE, ed AE è maggiore di NG, come NC è maggiore di NB; dunque i gradi di AE cresceranno relativamente a' gradi di NG in una estensione, che sia in proporzione di NC ad NB; e però i gradi che sostende la corda DE nella periferia maggiore ADE, saranno tanto minori in numero de' gradi dell' arco NG quanto è minore il raggio NB del raggio BA, o NC; ma i gradi dell' arco DE sono la misura dell' angolo DBE = NCG, ed i gradi dell' arco NG sono la misura dell' angolo NBG; dunque sarà tanto minore l'angolo NCG [DBE] dell' angolo NBG quanto è minore NB di NC, e però averanno gli angoli la reciproca proporzione de' raggi, cioè, come NB ad NC, così NCG ad NBG. Fig. 47.

Il che per vedersi in un esempio, sia NB a BA, come

me 1 a 2, ed NG sia di 30 gradi; sarà AE di 30 gradi; ma BA è doppio di NB; dunque AE è doppio di NG, e però contenendo l'istesso numero di gradi, saranno i gradi di AE doppj in estenzione de' gradi di NG; onde la corda NG, o DE sottenderà l'arco DE di gradi 15; e così sarà come NB (1) a BA, o NC [2], così l'angolo DBE, o NCG di gradi 15 all' angolo NBG di grandi 30; cioè gli angoli contenuti da i raggi, che terminano ad una medesima corda, nella proporzione reciproca de' raggi.

COROLLARJ.

I. Essendo ancora CE ad EO, come CF ad FB, e come *b* ad *a*, ed FB a BR, ed essendo CE, ed FB uguali saranno ancora uguali BR, ed EO; ed il semicircolo BLR sarà la quarta parte del semicircolo AEP, che ha un doppio diametro, ovvero sarà la metà del quadrante AEO; ma [per l'appendice del nostro Autore delle volte coniche, la quale pubblicò nell' Anno 1698 dopo la dimostrazione de' Problemi vivianei] la superficie conica ADEC alla sua base ADEO, è come la superficie della semifoglia CIE alla sua innografia BLR; cioè nella medesima ragione del lato del cono al raggio della base; essendo dunque ADEO doppia di BLR; ancora la superficie ADEC sarà doppia della semifoglia CIE; come di sopra si è per altra strada dimostrato, che il settore circolare circonscritto alla semifoglia sia doppio della medesima.

Fig. 18.

Spiegazione. *Cioè nella medesima ragione del lato del cono al raggio della base; Per intendere questo asserto si consideri la superficie del cono ADEC, formata dalla metà del lato AC nella periferia ADE, così* $\frac{1}{2}AC \times ADE$, *e la superficie della base ADEO formata dalla metà del raggio OE in ADE, cioè* $\frac{1}{2}OE \times ADE$; *ma* $\frac{1}{2}AC \times ADE$, *ed* $\frac{1}{2}OE \times ADE$, *sono come* $\frac{1}{2}AC$ *ad* $\frac{1}{2}OE$, *o come*

me AC ad OE; dunque la superficie del cono è alla superficie della base, come il lato del cono al raggio della base.

II. Essendosi dimostrato, che l'angolo ACI all' angolo NBG, come ancora ACE ad NBF, sono nella data ragione di *a* a *b*; è chiaro, che sarà ancora nella medesima ragione il rimanente angolo ICE al rimanente SBF, essendo (come si è provato) il ramo CI uguale a BS. Onde, se avendo risoluto il semicircolo CSE (*fig.* 19) negli archi concentrici SP, *sp* descritti al centro C, sieno divisi qualsivoglia di tali archi similmente ne' punti I ed *i*, (di maniera che sia sempre PI a PS, e *pi* a *ps* nella medesima data ragione di *a* a *b*); saranno i punti I ed *i* così ritrovati punti della Rodonea, che si descriverà più facilmente, che non si era insegnato di sopra.

Spiegazione. *Saranno i punti I ed* i *così ritrovati punti della Rodonea. Ciò è manifesto; perchè essendo nella figura* 18 *BS (HG) uguale al ramo CI: ancora nella figura* 19 *CS sarà uguale al ramo CI, ed avendo l'angolo ICE* [fig. 18] *all' angolo SBF la ragione di* a *a* b, *e per costruzione facendosi nella figura* 19 *l'angolo ICP all' angolo SCP, (con immaginarsi tirati il ramo IC, e la corda SC), ovvero IP ad SP nella ragione di* a *a* b, *saranno i punti I, ed* i, *punti della Rodonea.*

III. Anzi che se la ragione di *a* a *b* sarà di maggiore inegualità; contuttociò si potranno descrivere le Rodonee per mezzo del circolo più generalmente di quello si è insegnato nel Corollario II. della Proposizione V.; se gli archi PS, *ps* si producano a i punti, I ed *i*, dimanierachè sieno PI a PS, *Pi* a *Ps*, nella data ragione di *a* a *b*. Imperocchè fatto l'arco EAR al quadrante EA nella medesima ragione, e tirato il raggio CR, sarà l'angolo RCE all' angolo ACE, come l'angolo ICE all' angolo SCE; dunque ancora il rimanente ICR al rimanente SCA, ovvero *i*CR al rimanente *s*CA, il di cui seno è uguale a C*s*, o a C*i*, sarà nella medesima ragione di *a* a *b*; e però i punti I, *i*, apparterranno alla Rodonea della data ragione.

Fig. 20.

Spiegazione. *Il di cui ſeno è uguale a* C s, *o a* C i. *Il che ſarà chiaro, ſe ſi produca* C s *fino al quadrante* E *A*, *e dal punto dove* C s *ſega il quadrante* E *A*, *ſi tiri il ſeno perpendicolare ſopra* C *A*; *poichè allora ſi faranno due triangoli equiangoli, l'uno de' quali ſarà* C s E, *e l'altro il formato da* C s *prolungato in* E *A*, *e dal ſeno perpendicolare ſopra* C *A*, *il qual raggio* C s *prolungato è chiaro eſſere uguale al raggio* C E *del quadrante* E C *A*, *e ſimilmente poſto; onde ancora* C *s ſarà uguale al ſeno dell' angolo* s C *A*, *come che ancor egli ſimilmente poſto al detto ſeno.*

IV. E ſe quegli archi P S, P *s* deſcritti nel ſemicircolo ſi dividano nella ragione di *a* a *b*, e ſi accreſcano nella reciproca di *b* ad *a*, la lunghezza della curva interna alla lunghezza della curva eſterna ſarà come *a* a b, per ciò che ſi è detto nel Corollario IV. della Propoſizione antecedente.

Spiegazione. *Si dimoſtrerà il preſente Corollario coll' iſteſſa dimoſtrazione del Corollario IV. della Propoſizione antecedente; benchè ivi ſi parli delle Rodonee deſcritte nel medeſimo circolo, e quì di quelle deſcritte in un circolo con la ragione di* a *a* b (*come nella fig.* 19), *e fuori del detto circolo con la reciproca di* b *ad* a, [*come ſi vede nella fig.* 20]. *Per altro l'area della Rodonea* E I C [fig. 19] *all' area del ſemicircolo* E S C *è come* a *a* b. *Imperocchè eſſendo gli archi* I P, S P *come* a *a* b *per coſtruzione, ed eſſendo l'area della Rodonea* E I C *compoſta della ſomma infinita degli archi* I P, *e l'area del ſemicircolo* E S C *compoſta della ſomma infinita degli archi* S P, *ſarà l'area della Rodonea* E I C *all' area del ſemicircolo* E S C *come* a *a* b.

Da ciò ne viene, che facendo $a = 1$ *e* $b = 2$ *ſarà la Rodonea* E I C *al ſemicircolo* B S C *come* 1 *a* 2, *e ſupponendo* $a = 1$, $b = 3$ *ſarà, come* 1 *a* 3; *onde nel primo caſo la Rodonea ſarà la metà del ſemicircolo, o come* $\frac{1}{2}$ *ad* 1, *e nel ſecondo* $\frac{1}{3}$, *o come* $\frac{1}{3}$ *ad* 1; *e però averanno fra di loro le*

dette

dette Rodonee la ragione di $\frac{1}{2}$ *a* $\frac{1}{3}$ *(intendasi detto delle semifoglie delle Rodonee ciò, che si è nominato per Rodonea). La ragione però di 1 a 2 importa una Rodonea di 4 foglie, e la ragione di 1 a 3 importa una Rodonea di 6 foglie. Multiplicando dunque* $\frac{1}{2}$ *per 8 numero delle semifoglie della prima Rodonea, ne verrà 4; e multiplicando* $\frac{1}{3}$ *per 12 numero delle semifoglie della seconda Rodonea, ne verrà 4; il che fa vedere per altra strada l'ugualità d'infinite Rodonee descritte nel medesimo circolo, secondo la ragione di a a* b.

SCOLIO.

Ma secondo l'instituto del nostro Autore basti di aver toccato questo circa tali curve; benchè gli fosse facile il cavare altri sintomi delle Rodonee, come ancora altre specie di fiori descritti in un piano formati con differente costruzione; qualmente ancora poteva descriverne nella superficie conoidale, (come nell' ultima Proposizione delineò le Rodonee nella superficie conica), ed adombrare una certa immagine di quelle foglie, che sono nascoste nel calce del Fiore, se non si credesse di tediare chi legge.

Una conseguenza però generale ne deduce, che dall' ultimamente proposta generale e semplicissima descrizione delle foglie della Rodonea derivata dal circolo, si potrìa forse sospettare, che ancora i primi fili, o stami delle foglie, che sono nascoste nel seme del fiore, o del frutto, necessariamente debbano essere simili alle foglie cospicue ed adulte. Imperocchè se le foglie de' fiori e de' frutti imitassero veramente le nostre Rodonee, ci potremmo immaginare, che i loro primi fili racchiusi ne i semi di qualsivoglia specie, sieno circonscritti da una semplicissima figura circolare infinitamente piccola. Ma che dopo nel fiorire così si determini il sugo nutritivo,

dà una forza particolare a qualſivoglia ſpecie, che mentre creſce pel lungo il loro aſſe, ſi vadano allargando per certe onde, ovvero giri intorno alla loro origine, come centro, e queſti ſempre in una ragione determinata, cioè, o più ſtretti, o più larghi, come ſe ſi doveſſe ritenere la figura de' primi ſtami: il che ſuppoſto, ne naſcerebbe una tale ſpecie di foglie della Rodonea, un tal numero, ed una tal forma, quale determinaſſe quella ragione.

Così, benchè con altra legge la Natura formi le frondi de' fiori e de' frutti, non è neceſſario, che ſi oſſervi la loro figura fino dali ſteſſi primi fili, da' quali fioriſcono; ma quelli in qualſivoglia fiore potrebbero avere una certa e determinata figura, la quale ſolamente ſecondo la diverſa forza, che determina in eſſi l'eſtenſione o dilatazione del ſugo nutritivo, ſi doveſſe variare in qualſivoglia ſpecie ſecondo la diverſa ragione, colla quale foſſe diretta per le fibre de' medeſimi fili, eſſendo riſtrette, o dilatate ſecondo quella le onde circolari della ſua diffuſione.

PAR.

PARTE SECONDA DELLE CLELIE

ESPOSIZIONE.

NEll' isteffa maniera, con cui si sono descritte le Rodonee in un piano, possiamo immaginarci nella superficie sferica alcune linee curve, che dalla cima C [*fig.* 32. 33. 34.] della medesima superficie si vanno spargendo, come CLOHC, CIEFC, ec. le quali si diranno Clelie. La generazione adunque di queste simile all' origine delle Rodonee può essere l'infrascritta.

Si seghi la sfera, (il che s'intenda detto della Sferoïde, o di qualsivoglia corpo rotondo creato da un' altra figura raggirata), da un piano orizzontale, che esprima il circolo DEA, o passi questo piano pel centro della sfera, o seghi la medesima sopra o sotto il suo centro, di maniera che determini, o un emisferio, o una porzione minore, o una maggiore dell' emisferio; e tirato un piano verticale CGHB, che seghi il circolo orizzontale nel raggio BH, il quale dal punto fisso E orizzontale contenga l'arco EH, che corrisponda ad un altro arco EF in una data costante ragione di *a* a *b*; si ponga CM uguale al seno dell' arco EF, (o proporzionale a quel seno nella ragione di CB a BD, ogni qual volta il circolo DEA non passi pel centro della sfera, ovvero più generalmente ogni volta, che il raggio DB non è uguale all' altezza CB della Conoide CDE), e nel piano CHB si ordini MG paralella a BH, e questo si faccia sempre fino a che pe' punti G e *g* trovati in questa maniera passi la curva C*g*GD.

Fig. 35.

Questa

Questa si dice *Clelia*, ma *della prima descrizione*. Imperocchè se piuttosto si prenda nell' istesso raggio BH la parte BI uguale al seno del predetto arco EF, ed indi s'innalzi la retta IG, che tagli l'arco CH in G, si dirà la curva C*g*GD, che ne proviene una *Clelia della seconda descrizione*, la di cui Icnografia sarebbe la Rodonea della ragione di *a* a *b*. Di maniera che se s'intenda eretto un solido cilindrico sopra una tal Rodonea B*i*ID, che seghi la sferica o sferoidale superficie nella curva C*g*GD, questa curva sarà una Clelia della seconda descrizione data, a cui competeranno tante foglie disposte in quella superficie rotonda, quante foglie averà l'istessa Rodonea, che fa la base del cilindrico.

E' però manifesto, che una tal Clelia della seconda descrizione si potrà formare solo nell' emisferio, o nella porzione minore dell' emisferio, non in una porzione maggiore, nella di cui base essendo descritta una Rodonea, se sopra il suo perimetro s'innalzi un cilindrico, imprimerà la forma di detta Rodonea in un circolo parallello, ed uguale a detta base della porzione maggiore, e remoto ugualmente dal centro della sfera; e dopo formerà la sua Clelia nella sferica superficie della minore porzione segata dalla base del secondo circolo, le punte delle di cui foglie non potranno toccare il margine della base della porzione maggiore, ma solo arriveranno al margine di detta base della minore porzione.

Per altro si può concepire, che se le Clelie dell' una, e dell' altra descrizione sieno descritte da un doppio moto, l'uno equabile dell' arco del meridiano CLE [*fig.* 36], che passa pel polo C, e per la periferia del circolo orizzontale HDA, e l'altro del punto C, che discenda pel medesimo meridiano nel tempo stesso con questa legge, che [nella prima descrizione] il seno verso CM dell' arco corso CG sia al seno retto dell' arco QE, [al quale l'arco HE passato dal meridiano è, nella ragione costante di *a* a *b*], come l'altezza della porzione sferica CB è al raggio AB della sua base.

Ma nella seconda descrizione il medesimo seno retto MG

MG dell' arco passato CG sia uguale al seno del predetto arco QE, a cui parimente l'arco HE passato dal Meridiano è come *a* a *b*.

Fig. 36.

Spiegazione. *Il moto equabile del Meridiano, che passa pel polo C, e per la periferia del circolo orizzontale HDA ec. è l'istesso che quello che si ordina nel principio della presente esposizione* (fig. 35), *dove ad ogni punto* h *del circolo orizzontale si suppone, che sia tirato un piano verticale* CghB; *il moto poi del punto C, che discende pel medesimo meridiano con questa legge, che il seno verso CM dell' arco corso CG, sia al seno retto dell' arco QE, come l'altezza della porzione sferica CB è al raggio AB della sua base. Questo moto, dico, fatto con tal condizione* [*per la prima descrizione*] *è il medesimo, che quello che si insegna di sopra* (fig. 35), *che tirato il piano verticale CGHB, che seghi il circolo orizzontale nel raggio BH, che dal punto fisso E nella periferia orizzontale contenga l'arco EH, che risponda ad un altro arco EF nella data costante ragione di* a *a* b, *e si ponga CM, o uguale al seno dell' arco EF, o proporzionale a quel seno nella ragione di CB a BD, ogni qual volta il circolo DEA non passi pel centro della sfera, e nel piano CHB si ordini MG paralella a BH, e ciò sempre si faccia, fino a che pe' punti così trovati passi la curva CgGD. Poichè se attentamente si considera* [fig. 36] *è l'istesso quello, che si è insegnato di sopra, che il dire che il punto C si porti sopra il meridiano CGH, mentre questo si muove dal punto E al punto H del circolo orizzontale ADHE: con questa condizione, che il seno verso CM sia al seno dell' arco QE, come CB a BA; essendo quest' ultima espressione più semplice, ec. e l'istesso si dica della seconda descrizione relativamente a ciò, che nella esposizione si è prima insegnato a sua riguardo.*

Solo notisi, che rappresentando ADQEP l'orizzonte, il punto C sarà polo del medesimo orizzonte, o, come dicono i geografi, il zenit, per supporsi, che i circoli, che passano pel punto C, seghino ad angoli retti il circolo APD EP; onde detti circoli non pare, che possano dirsi circoli meridiani, se non nella sfera paralella, in cui il polo del mondo serve

serve di polo, o zenit all' orizzonte, confondendosi in essa l'equatore coll' orizzonte: ciò però non altera niente l'assunto del nostro Autore.

PROPOSIZIONE I.

SE l'arco ED (fig. 36) sarà al quadrante EF del medesimo circolo orizzontale come a *a* b*; ma pel polo C si tiri il meridiano CND, sarà questo l'asse di una delle foglie della Clelia (tanto della prima, che della seconda descrizione) disteso alla massima lunghezza della foglia, e che divide la medesima in due semifoglie uguali dall' una e l'altra parte del medesimo, e che similmente si diffondono per la superficie sferica.*

Imperocchè essendo nella prima descrizione della Clelia l'arco EF per ipotesi un quadrante, a cui corrisponde l'arco ED nella ragione di *a* a *b*, il di lui seno FB sarà massimo; e però se nell' asse CB della sfera si ponga la corrispondente altezza, o il seno verso dell' arco, che intanto si è passato dal punto mobile C nel meridiano nella ragione di CB al raggio della base BD, sarà una tale altezza, o seno verso uguale a tutta l'altezza CB della porzione sferica, come che l'istesso seno FB è uguale al raggio DB; onde tutto l'arco CD corrisponderà a quel seno verso, e sarà il massimo di tutti quelli, che passano per la medesima foglia. Imperocchè ogni altro arco, che risponde a qualsivoglia altro arco EH, o EK nella medesima ragione, nella quale corrisponde il quadrante all' arco ED, averà un seno minore; onde ancora l'altezza, o seno verso CM dell' arco del meridiano CG, o CI, passato nel tempo medesimo dal punto mobile C, in cui il meridiano medesimo scorre l'arco EH o EK, sarà minore di CB; e però qualsivoglia altri archi del meridiano CG, CI terminati al perimetro della Clelia, saranno sempre minori di CND.

Che se si prendono nella medesima periferia orizzontale i punti H e K ugualmente lontani di quà, e di là dal

dal punto D; ancora i termini degli archi, a' quali risponderanno gli archi HE, KE nella ragione di *a* a *b* saranno ugualmente distanti dal termine F del quadrante EF; onde i loro seni saranno uguali, e però corrisponderà loro la medesima altezza, o seno-verso CM, tanto dell' arco del meridiano CG, che CI intercetto dal perimetro della foglia: i quali archi perciò saranno uguali, e si scosteranno dall' una, e dall' altra parte dal meridiano CD con angoli uguali; onde l'istesso meridiano CND dividerà la foglia in parti uguali, e distese similmente; il che, ec.

Spiegazione. *Imperocchè ogni altro arco, che corrisponde a qualsivoglia altro arco, come EH; o EK, nella medesima ragione, nella quale corrisponde il quadrante all' arco ED, averà ivi un seno minore, ec. Ciò è chiaro primieramente per l'arco corrispondente ad EH, poichè se ED maggiore di EH è nella ragione di* a *a* b *al quadrante EF, l'arco EH sarà nella medesima ragione ad un arco minore del quadrante; e però averà un seno minore.*

Per l'arco poi corrispondente ad EK si prova così. essendo EK maggiore del quadrante EF, averà la ragione di a *a* b *ad un arco molto maggiore del quadrante, il di cui seno però sarà minore del seno tutto, come che uguale al seno del compimento al semicircolo del medesimo arco.*

Che se si prendono nella medesima periferia orizzontale i punti H e K ugualmente lontani dal punto D, ancora i termini degli archi, a' quali risponderanno gli archi HE, KE nella ragione di a *a* b, *saranno ugualmente distanti dal termine F del quadrante EF; e ciò si prova così. Essendo EH ad EQ, come ED ad EF, levando EH da ED, ed EQ da EF, saranno ancora i residui archi DH, QF nella medesima ragione; similmente come ED ad EF, così EK ad un quarto arco, che sia EA. Dunque levando ED da EK, ed EF da EA, sarà ancora il residuo arco KD al residuo arco AF nella medesima ragione; ma KD è uguale a DH [per ipotesi], dunque ancora AF sarà uguale ad FQ.*

Se poi la Clelia sarà della seconda descrizione, è

manifesta la verità dell' asserto ; perchè la sua icnografia sarà la Rodonea descritta nel piano del circolo orizzontale, di cui nella Proposizione I., e II. della Prima Parte sono state dimostrate cose simili ; e facilmente ciascheduno può intendere, che quelle cose che convengono ad una tale icnografia, convengono ancora alla foglia della Clelia descritta nella superficie sferica ; onde in tutti i casi è chiaro l'assunto.

Spiegazione. *Imperocchè per la I. Proposizione della Prima Parte sarà DB* (fig. 35.) *l'asse della Rodonea, e però BC perpendicolare a DB, ed il punto D determineranno l'arco CD per la legge della seconda descrizione, che sarà l'asse della Clelia, perchè corrisponde al raggio BD, che è l'asse della Rodonea. Similmente per la seconda Proposizione della Prima Parte la foglia della Rodonea si sparge di quà, e di là dell' asse DB con una espanzione simile ed uguale : il che per la legge della seconda descrizione doverà succedere anche nella foglia della Clelia; giacchè da' punti I ed i della Rodonea, tirate le perpendicolari IG, ig, e così dall' altra parte, seguirà l'istesso, che della Rodonea si è provato nella detta Proposizione II. della Prima Parte.*

COROLLARJ.

I. Tirato l'arco paralello all' orizzonte OINGL [*fig.* 36.] intercetto dagli estremi meridiani, che toccano la Clelia nel polo C, è manifesto, che gli archi NG, NI tagliati di quà e di là dal meridiano CND, saranno fra di loro uguali, come ancora GL, IO, qualmente nella base tanto DH è uguale a DK, quanto HE ad AK.

Spiegazione. *Essendo nella base uguali DH, e DK ed HE, AK necessariamente gli archi simili, che si corrispondono nel circolo paralello OGLM, saranno uguali rispettivamente. Che poi DH, e DK, come HE, ed AK sieno uguali fra di loro, per DH e DK si è provato di sopra; per AK ed HE si prova.*

Poichè il semmento ABE della base, è quello, che con-

contiene la Rodonea, che è l'icnografia della Clelia DIC GD, *e l'asse della Rodonea è* DB; *dunque* AD *e* DE *saranno semmenti uguali, da' quali levando gli uguali* KD, DH *resteranno uguali i semmenti* AK, HE.

II. Dunque l'arco LN sarà medio aritmetico fra l'arco GL, IL come l'arco ED è medio aritmetico fra HE e KE; e però la somma de' medesimi GL, IL, o LNO, o di KE, KA o ADE come doppio dell' arco ED sarà alla semiperiferia del circolo formato dal raggio BD, che è doppia del quadrante EF, come il medesimo arco ED ad EF, cioè come *a* a *b*.

Spiegazione. *Ancora la somma* LNO *sarà alla semiperiferia del circolo formato dal raggio* MN, *come* LN *al quadrante corrispondente al punto* F, (*come doppia detta somma dell' arco* LN), *e però come* a a b.

III. Ed il settore della superficie sferica ADEC circonscritto ad una foglia, sarà alla metà della superficie della porzione sferica, in cui la Clelia è descritta, nella medesima ragione di *a* a *b*, ed a tutta la superficie di detta porzione sferica come *a* a 2*b*. Imperocchè sono le superficie sferiche interposte fra i meridiani, come gli archi de' paralelli intercetti da esse, i quali archi misurano gli angoli d'inclinazione di tali meridiani.

Spiegazione. *Che le superficie sferiche interposte fra' meridiani sieno fra di loro come gli archi de' paralelli intercetti da esse, è chiaro. Poichè per la Proposizione XIII. della Sezione I. del calcolo integrale di Monsieur Carrè essendo la superficie di tutto l'Emisfero* ADPC *uguale al rettangolo sotto* BC = (BD) *e la circonferenza del circolo maggiore, o della base* ADP, *sarà la superficie de' particolari semmenti, come* ACD, *uguale a* CB X AD, *e la superficie* HCD = CB X HD; *onde la superficie* ACD *alla superficie* DCH, *sarà come* AD *ad* HD; *e però essendo* ADE *pel Corollario II. alla metà della circonferenza come* a *a* b, *sarà il settore della superficie sferica* ADEC *alla metà della superficie emisferica* ADPC, *come* a *a* b, *ed a tutta la superficie come* a *a* 2b.

PROPOSIZIONE II.

Il numero delle foglie di qualunque Clelia distinte fra di loro da' settori simili ed uguali, ne' quali si può distribuire la superficie curva di qualsivoglia sfera, è all' unità come 2 b *ad* a.

Imperocchè tante saranno le foglie, quanti i settori circonscritti alle medesime, ciascheduno de' quali a tutta la superficie della porzione sferica, e però alla somma di tutti tali settori pel Corollario III. della Proposizione antecedente, sono come *a* a 2 *b*; dunque convertendo il numero di tutti i settori, e però la somma delle frondi della Clelia inscritte in ciaschedun settore è all' unità come 2 *b* ad *a*, il che, ec.

Spiegazione. *La somma delle foglie della Clelia inscritte in ciaschedun settore è ad una foglia,* [*che è l'istesso, che dire all' unità*] *come* 2 b *ad a*.

SCOLIO.

Quì ancora si suppone, come si è notato nello Scolio della Proposizione III. della Prima Parte, che a ciascheduna foglia corrispondano foglie distinte, che non comunichino insieme. Però se la ragione di *a* a *b* sarà dell' unità ad un numero impari, (poichè nelle Clelie ugualmente, che nelle Rodonee di sua natura a ciascheduna foglia sarebbero interposti altrettanti settori voti, di maniera che il numero delle foglie all' unità fosse solamente come *b* ad *a*) bisognerà supporre, che mentre il meridiano è mosso equabilmente in giro, due punti discendano insieme dal polo C con moto contrario: come se l'uno per C A, e l'altro scenda per C P, con osservare la medesima legge, acciocchè i settori, che sarebbero rimasti voti, nel medesimo tempo restino riempiti dalle loro foglie. Imperocchè cose simili a quelle, che si notarono nello Scolio citato delle Rodonee, si doveranno notare nelle Clelie;

Fig. 36.

lie; nè ciò si potrà ignorare da chi osserverà la legge della continuità del moto, che debbe osservarsi dalla natura in ogni cosa.

Spiegazione. *Nel suddetto Scolio, ed in quello molto più della Proposizione III. dove si dice, che possa e debba accadere, che quando la ragione di* a *a* b *sia quella dell' unità ad un numero impari, ne nasca una Rodonea, che abbia altrettanti settori voti, quanti pieni; ciò si debbe intendere con moto continuo, ed unito: altramente ciò sarebbe contrario a quello, che si dice nel Corollario I. della Proposizione III., che la ragione di 1 a 3 dà una Rodonea di 6 foglie; e nello Scolio di detta Proposizione si dice, che se la ragione di* a *a* b *sia di 1 a 3, ne verrà una Rodonea trifolia, che averà 3 settori pieni, e 3 voti. Si avverta dunque, che per avere tutti i settori pieni, come nella presente, e III. Proposizione della I. Parte, non sarà il moto continuato prodotto da un istesso mobile; ma mentre il punto* C (fig. 23, e 24) *scende pel raggio* CR *per la descrizione di tali curve, un' altro punto con un moto simile, ma opposto, si muova pel raggio* CS, *per descrivere una simile curva ed uguale, che riempia gli alterni settori voti. Quindi si vede nella figura 24, che è una Rodonea di 6 foglie, che tre sono descritte secondo la continuazione delle lettere dell' Alfabeto così ABCDEFCGHICQ, e l'altre tre secondo le lettere STCKLMCNOPCRS. Il che non succede, quando la ragione di* a *a* b *è di 1 ad un numero pari; poichè allora con un semplice moto del medesimo centro* C, *che vada pel raggio secondo le leggi stabilite, mentre intanto il raggio perfeziona la sua circolazione, ne nascono tutte le foglie della Rodonea, che empiono ciaschedun settore. Così se la proporzione è di 1 a 4, tutto il giro della Rodonea passerà* (fig. 25) *pe' punti* C b *ABC DEFCGHICKLMCNOPCQRSCTVXCYZ* a C; *e ciò che si dice della Rodonea, si debbe proporzionare alle Clelie.*

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Fig. 36.

SE la ragione di a *a* b *non si possa esprimere in numeri, ma sieno incommensurabili gli archi HE, QE, o ED, FE, la Clelia sarà composta da innumerabili foglie, che si raggirino per infinite circolazioni.*

Ciò è manifesto per una simile ragione, in cui è stato dimostrato il presente assunto nella Proposizione IV. della I. Parte. Imperocchè ciascheduna circolazione del meridiano, oltre un determinato numero di foglie, genererà una parte della foglia incommensurabile al suo tutto; nè mai il viaggio del punto mobile, che genera la Clelia, sarà restituito dal meridiano al medesimo punto, ed alla medesima direzione.

Spiegazione. *Si veda ancora la nostra dimostrazione alla spiegazione della Proposizione IV. Parte I., che è applicabile alla presente proposizione.*

PROPOSIZIONE IV.

SE la ragione di a *a* b *sia ragione di ugualità, ne nascerà nell' Emisferio una Clelia di due foglie, che nella prima descrizione sarà il medesimo, che la vela quadrabile determinata dal Leibnizio nella superficie sferica; ma nella seconda descrizione le sue foglie sono l'istesso, che gli occhi posti di quà, e di là alla vela quadrabile Fiorentina, descritta similmente dal Viviani nella Superficie Sferica.*

Imperocchè in questo caso, secondo la legge della prima descrizione si dovrà fare il seno verso CM [*fig.* 37] del meridiano CH uguale al seno retto HS dell' arco medesimo HE, il quale dal meridiano CH si taglia nell' orizzonte dal punto fisso E. Ma quest' istessa è la costruzione che propose il Leibnizio per lo scioglimento dell' enigma Fiorentino, come si vede negli atti di Lipria

psia del mese di Giugno 1692. n. 5.; Dunque in tal caso le due foglie della Clelia rappresenteranno per appunto la vela quadrabile determinata dal Leibnizio nella Superficie Sferica.

Spiegazione. *In primo luogo, come si è veduto delle Rodonee, la proporzione di* a *a* b *supposta di 1 ad 1, darà il numero delle foglie della Clelia = 2; perchè la ragione di* 2b *ad* a, *sarà di 2 ad 1. Poi il seno verso* CM *sarà uguale al seno* HS *dell' arco* HE, *[che è l'arco, che nella figura 36, corrisponde ad* a*]; giacchè detto arco nella figura 37 è l'istesso, che l'arco* EQ *della figura 36, per essere la proporzione di* a *a* b *proporzione di ugualità, ed il seno verso* CM *sarà seno verso dell' arco* CG *del meridiano* CH, *e di un uguale arco del meridiano* CE; *e però ogni semifoglia occuperà un quadrante della superficie dell' Emisferio, dovendo essere* CF, *e* CP *gli assi delle due foglie per la Proposizione I, e* CB *il seno verso degli assi o semicircoli* CF, *e* CP. *Il resto è chiaro, supposta la costruzione del Leibnizio la medesima, che quella della prima descrizione del nostro Autore. Ma perchè forse taluno potrebbe desiderare la quadratura di detta vela, si darà quì la medesima ricavata dagli Atti suddetti, spiegata, e dimostrata da noi, dove manca la dimostrazione.*

Avanti di venire alla Quadratura suddetta si fanno precedere alcuni Lemmi.

Lemma I.

Fig. 48. 49.

Se una Sferica Superficie sia risoluta in elementi, tirati i meridiani e paralelli, le piccole aree elementari comprese fra i due meridiani, e due paralelli, saranno fra di loro nella ragione composta degli elementi dell' equatore fra i meridiani, e degli elementi dell' asse fra i paralelli; e le dette aree saranno uguali a i prodotti di questi elementi multiplicati rispettivamente fra di loro.

Così nella figura 48. la piccola area LN, *sarà alla*

di

piccola area NR *nella ragione composta di* HG *a* GQ, *e di* ST *a* TV; *il che secondo la sua analisi differenziale degl' infiniti così si vede. Sia il raggio* PK *o* KH $=$ r, *l'arco* PL *sia* $=$ a, *ed il suo seno verso* PS *sia* $=$ x, *ed il seno retto* LS *sia* $=$ y *e* GH $=$ du; *sarà* LM $=$ da, ST $=$ dx, *ed* NM $= \frac{ydu}{r}$: *poichè se il raggio* HK (r) *dà il raggio* MT (y), *che darà l'arco* GH [du]? *e ne verrà l'arco* NM $= \frac{ydu}{r}$. *In simigliante maniera si proverà* LM $= \frac{rdx}{y}$ *Poichè* (fig. 49) *per la similitudine de' triangoli* MLt, KLS, *sarà* LS [y]. LK $=$ HK [r] :: Lt $=$ ST, [dx]. ML (da) $= \frac{rdx}{y}$. *Ora la piccola area* LN *è prodotta da* NM *in* LM [*considerandosi* LN *come un rettangolo rettilineo per la sua infinita piccolezza*): *dunque sarà* NML $\frac{ydu}{r} \times \frac{rdx}{y} = \frac{rydudx}{ry}$ $=$ dudx. *Similmente essendo* PT $=$ x, *e* TV $=$ dx, QG $=$ du, *averemo come prima* RX $= \frac{ydu}{r}$, *ed* NX $= \frac{rdx}{y}$, *e però* RXN $=$ dudx; *onde* NL $=$ dudx *sarà ad* RN $=$ dudx *nella ragione composta di* du *a* du, *e di* dx *a* dx; *cioè* NL *sarà ad* NR, *nella ragion composta di* GH a QG, *e di* ST *a* TV, *e le dette aree saranno uguali a i prodotti di questi elementi*; *il che*, *ec.*

Altra nostra dimostrazione independentemente dal calcolo del Leibnizio.

Per quello si dimostra da noi alla spiegazione della Proposizione V. al §. Che poi il triangolo, ec. *sarà il triangolo* PIL $=$ PS $\times$ GH, *ed il triangolo* PNM *sarà* $=$ PT $\times$ GH; *dunque levando da* PNM *il triangolo* PIL, *e dal rettangolo* PT $\times$ GH *il rettangolo* PS $\times$ GH *resteranno uguali il piccolo spazio* LN, *ed il rettangolo* ST $\times$ GH.

Nell'

Nell' istessa maniera si proveranno uguali il piccolo spazio N R, ed il rettangolo sotto T V X Q G *; onde gli spazj* L N, *ed* N R *averanno fra di loro la proporzione composta di* S T *a* T V, *e di* G H *a* Q G*; il che, ec.*

Lemma II.

Posto quanto si è dimostrato dal Leibnizio, il trilineo elementare compreso fra due meridiani, e l'elemento di un paralello; sarà uguale al rettangolo sotto il seno verso de' gradi del meridiano, e l'elemento dell' equatore intercetto fra i meridiani.

Imperocchè nella medesima figura 48. il triangolo P M N *sarà* = P T X G H*; giacchè essendosi trovata la piccola area* L N = d u d x, *nel primo Lemma, ed essendo il trilineo elementare sferico* P M N *composto della somma infinita di tali aree poste fra* P *ed* M N *(essendo sempre* G H = d u *costante) sarà per conseguenza il detto trilineo espresso da* S. d u d x, *ed integrando da* x d u, *cioè da* P T X G H*; il che, ec.*

COROLLARIO.

Supponendo H F = P S, *la superficie cilindrica* H F, E G *sarà uguale al trilineo elementare sferico* P L I, *per esser formata per* Archimede *da* H F X G H = P S X G H.

SCOLIO.

Questo Lemma e suo Corollario si dimostra altramente al §. citato nella seconda dimostrazione del I. Lemma.

Lemma III.

Un Trilineo compreso nella superficie sferica da due archi di meridiani (o circoli massimi), e da qualsivoglia

altra linea suttendente, è uguale alla porzione della superficie cilindrica, la di cui base sia l'arco dell' equatore intercetto tra i meridiani, e la superficie sia formata da una retta, che insista perpendicolarmente al piano dell' equatore innalzata al punto, in cui qualsivoglia meridiano sega l'equatore, qual retta sia uguale al seno verso de' gradi del meridiano interposti fra il polo, e la linea sottendente.

Nella figura 48. *supponendosi uguali* HF, GD, QB *rispettivamente a* PS, PT, PV, *e così negli altri punti la porzione della superficie cilindrica* HFBQ *(, o la susuperficie dell' ungula) sarà uguale al trilineo* PLRP *descritto nella superficie sferica.*

Imperocchè supponendosi IL, GH = DA *infinitamente piccoli, saranno i meridiani* IP, PL, *o* PG, PH *infinitamente vicini, ed essendo ancora infinitamente vicini* NM, IL, *sarà* IN *infinitamente piccolo, e la differenza fra* IL *ed* LN *infinitamente piccoli, molto più infinitamente piccola; onde* LN *si potrà prendere per* IL, *ed il trilineo* PIL *per il trilineo* PNL, *l'istesso si dica della superficie* GEFH, *che si potrà prendere per l'istessa ragione, per la superficie* GDFH; *ma il trilineo* PRL *è composto di tali spazj elementarj uguali rispettivamente agli spazj, che compongono l'ungula cilindrica* QBFH *pel* Corollario del Lemma II.; *dunque il detto trilineo* PRL, *e l'ugula* QBFH *saranno uguali.*

Lemma IV.

Fig. 50.

La superficie cilindrica la quale è formata quando i seni retti sono perpendicolari al piano di un circolo a i punti corrispondenti dell' arco del detto circolo, sarà uguale al rettangolo formato dal raggio, e dalla porzione dell' asse intercetta fra gli estremi seni retti, e però sarà assolutamente quadrabile.

Così nella *fig.* 50 se per tutto BC è ugale ad AB, la superficie cilindrica B(B), C(C) sarà uguale al rettangolo sotto il raggio ed A[A]

Que-

Questo Teorema che si lassa indimostrato dal Leibnizio si dimostra dipendentemente dal Corollario II. della Proposizione IV. de' Vivianei del nostro Autore.

Poichè per detto Corollario sarà [fig. 52.] *l'ungula cilindrica* ADFQE, *che sega il cilindro col piano* ABF *inclinato al piano del quadrante suddetto ad angolo semiretto, (che è appunto la linea de' seni* C (C) *del Leibnizio), sarà dico dett' ungula* ADFQE *uguale al quadrato del raggio* BE, *o* BF, *o che è l'istesso al rettangolo sotto* AE, *e* BE *uguale.*

Ora dico in primo luogo, che lo spicchio dell' ungula DQqFD *è uguale al rettangolo sotto* BF, *ed* FN *seno verso dell' arco* QF.

Imperocchè sia BF, BE, *o* Bq $= r$, NF $= x$, Nn $= dx$, nq $= y$, FQ $= u$, *sarà* Qq $= du$, *e per la similitudine de' triangoli* nBq, *e* QqN *(immaginando* Nn $=$ qN) *averemo* Bq [r]. nq [y] :: Qq (du) qN, *o* Nn (dx) *e però* $r dx = y du$.

Onde ancora sarà $S. r dx = S. y du$, *cioè integrando*, $r x = S. y du$; *Ma* $r x =$ BFN, *e* $S. y du =$ DQFD; *dunque* BFN $=$ DQFD.

Ciò posto levando dall' ungula AEQFA *lo spicchio* DQFD, *e dal quadrato* $\overline{BF}^2$ *uguale all' ungula suddetta, il rettangolo* BFN *uguale allo spicchio* DQFD *resteranno uguali il rettangolo* FBN, *e la porzione dell' ungula* AEQDA, *ovvero* [fig. 50.] *il rettangolo sotto il raggio, ed* A (A), *alla superficie* B (B) C (C), *il che, ec.*

SCOLIO.

Chi volesse la dimostrazione del detto Lemma senza calcolo basta, che veda la spiegazione del V. Corollario della Proposizione VI. di questa II. Parte, ed ivi troverà provato senza calcolo, che lo spicchio D Q F D dell' ungula A E Q F A è uguale al rettangolo B F N; il resto dipende dal §. Ciò posto, ec. *della presente dimostrazione.*

Problema principale del Leibnizio.

Fig. 51.

La quadratura della Vela, o della Lunula sferica descritta con modi determinati.

Sia nella figura 51. il quadrante P Q S A E P dell' emisferica superficie, da cui sia tagliata la Vela, o Lunula sferica P E A L Y P per mezzo della curva A L Y P tirata nella sferica superficie, di modo che tirato il meridiano P L S per 1 L, che tagli l'equatore Q S A in S, sia F S, o F X, seno retto di Q S arco dell' equatore Q S A, o di Q X, arco uguale a Q S, qual seno F S, o F X sia uguale a P B seno verso di P N L arco di un meridiano tagliato nel punto L dalla B L paralella a Q K, e che però il punto L apparterrà alla curva A L Y P, dico che questa vela intera P E A L Y P è uguale al piano K T, che è il quadrato del raggio della sfera, e di più si averà qualunque porzione della medesima.

Si dimostra; le rette S R uguali ad F S, o a P B insistano all' arco dell' equatore Q S A, di maniera che sieno perpendicolari al piano del medesimo equatore K A Q, e però formeranno uno scudo A C R Q S A che è la metà della superficie cilindrica descritta nel Lemma precedente, ovvero dell' ungula A E Q F A descritta nella figura 52. Ora essendo S R = P B per costruzione, sarà (per quello si dimostra nel Lemma III.) la porzione della Vela P 1 L 3 L Z P uguale alla porzione dello scudo 1 S 1 R 3 R 3 S 1 S; Ma questa porzione pel Lemma IV. è uguale al rettangolo 1 F 3 M, cioè 1 F 1 M X 1 M 3 M; dunque, ec.

ch'è

ch'è una parte della presente dimostrazione.

Similmente tutta la vela P E A L T P si proverà uguale nell' istessa maniera pel Lemma III. a tutto lo scudo A C R Q S A, e questo è uguale al piano K T pel Corollario II. della Proposizione IV. de' Vivianei *del nostro Autore, qual piano K T è il quadrato del raggio; dunque sarà la vela P E A L T P uguale al quadrato del raggio; il che, ec.*

SCOLIO.

Volendo dimostrare per mezzo del calcolo del Leibnizio ciò che dimostra il P. Abbate Grandi al Corollario II. della Proposizione IV. de' suoi Vivianei; cioè che (fig. 52) *l'ungula cilindrica A D F Q E sia uguale al quadrato del raggio. S'osservi, che nel Lemma IV. si è trovato B F N* (rx) = *D Q F D* [S. y d u]; *Se dunque c'immagineremo il punto N scorso in B, il punto D in A, ed il punto Q in E, averemo F N* [x] = *F B* (r); *e però B F N* [rx]

$= \overline{BF}^2$ (rr). *Similmente D F Q* = S. y d u = *A D F Q E*

e però rr = S. y d u; *cioè* $\overline{BF}^2$ = *all' ungula A D F Q E; il che, ec.*

Ma a tenore della legge della seconda descrizione, poichè il cilindrico innalzato sopra la Rodonea della base determina la Clelia intercetta da esso nella superficie sferica; e per la Proposizione VI. della I. Parte dalla ragione di ugualità di *a* a *b* ne nasce la Rodonea bifolia; che non è altro che un doppio circolo formato sopra la metà del diametro come F L B, B T P, [*fig.* 38] ne viene, che ne debba risultare una Clelia, che esprime il foro, o rottura della sfera fatta dal doppio cilindro F L B C, P T B C, cioè quella che forma la curva sferocilindrica F G C, P I C continuata all' altra parte posteriore del meridiano F C P; di maniera che le semifoglie C G F, C I P descritte nella superficie sferica, siano quegli occhi, i quali Vincenzo Viviani, autore di quell'

quell' Enigma, insegnò doversi aprire nella sua volta Fiorentina a guisa di una vela distesa sopra la superficie sferica, secondo la costruzione dal medesimo data nell' opuscolo Italiano *Formazione, e misura di tutti i Cieli* pubblicato in Firenze nel medesimo Anno 1692. *Problema I.*, il che il nostro Autore diede dimostrato nella *Geometrica dimostrazione de' Problemi Vivianei* con altri l'Anno 1698; onde in detto Trattato, ed in questo è manifesto ciò che si doveva dimostrare.

COROLLARJ.

I. Una tal Clelia della prima descrizione descritta su l'emisferio è perfettamente quadrabile; cioè a dire sarà doppia del quadrato inscritto nel circolo massimo che è base del medesimo emisferio; imperocchè il Leibnizio nel luogo citato prova che la sua Vela descritta nel quadrante dell' emisferio (che è una semifoglia di una tal Clelia bifoglia) è uguale al quadrato del raggio; dunque quadruplicando i due uguali, tutta l'area della medesima Clelia bifolia della prima descrizione descritta nell' Emisferio sarà uguale al quadrato del diametro della sfera, ovvero sarà doppia del quadrato descritto nel circolo massimo.

Spiegazione. *Se una semifoglia di una tal Clelia secondo il Leibnizio è uguale al quadrato del raggio, tutta la Clelia che è uguale a 4 semifoglie sarà, uguale al quadrato del diametro, che è quadruplo del quadrato del raggio, e doppia del quadrato descritto nel circolo massimo che è la metà del quadrato del diametro a cui è uguale la detta Clelia.*

II. E lo spazio trilineale E F G C (*fig.* 37.) intercetto dal meridiano C E, che spartisce l'una, e l'altra foglia, l'orizzonte F E, e la curva della semifoglia F G C è il doppio del semmento circolare del quadrante F H E, imperocchè tutta la superficie del quadrante emisferico F H E C è doppia del quadrante del circolo F H E B; onde essendo la mezza foglia F G C uguale al quadrato del rag-

raggio, o doppio triangolo FBE quel residuo trilineo sarà doppio del rimanente semmento FHE.

Spiegazione. *Che tutta la superficie del quadrante emisferico FHEC sia doppia del quadrante del circolo FHEB; ciò procede, perchè per quello si è notato alla Spiegazione del Corollario III. della Proposizione I. la detta superficie sarà = BE×FHEB, e il quadrante del circolo $\frac{1}{2}$BE×FHEB.*

Di più essendo la mezza foglia FGC uguale al quadrato del raggio, o al doppio triangolo FBE, quel residuo trilineo sarà doppio del rimanente semmento FHE; poichè se dalla superficie del quadrante emisferico FHEC doppia del quadrante FHEB si levi la semifoglia FGC doppia del triangolo FBE, resterà il trilineo FGCEH doppio del semmento FHE.

III. Onde tutto l'eccesso della superficie emisferica sopra due foglie della Clelia sarà ottuplo del medesimo semmento del quadrante circolare FHE.

Spiegazione. *Ciò è chiaro perchè quest' eccesso sarà uguale a 4 trilinei FGCEH; e però ottuplo del detto semmento di cui ogni trilineo è doppio.*

IV. Che se una tal Clelia non sia descritta nell' Emisferio, ma in una porzione maggiore, o minore, i seni versi CM [*fig.* 37.] degli archi CG cresceranno, o decresceranno in riguardo de' seni retti HS degli archi EH nella costante ragione dell' altezza della porzione CB al raggio della base FB; onde pel medesimo Leibnizio nel luogo citato numero 6. l'area delle foglie crescerà, o dicrescerà nella medesima ragione, e sarà al quadrato del diametro della sfera, ovvero al doppio quadrato descritto in un suo circolo massimo nella medesima ragione dell' altezza CB al raggio della base FB.

Spiegazione. *Il Leibnizio al citato numero 6. propone l'asserto del nostro Autore in forma di Problema così.*

Costruire una Vela sferica, che sia nella data ragione al quadrato del raggio della sfera, cioè di minore inegualità, o di un minore ad un maggiore.

Ciò

Ciò si farà con costruire in maniera la linea PLLA (fig. 51.), *che il seno verso PB dell' arco PNL, (porzione del meridiano PLS), non sia uguale ad FS seno retto dell' arco QS porzione dell' equatore QSA, come si fu nel Problema precedente del Leibnizio della quadratura della Vela, ma minore nella data ragione, il che da noi si dimostra così.*

Se PS [fig. 48] *seno verso dell' arco PL non sarà uguale ad HF, supposto uguale al seno retto dell' arco GH, ma al medesimo in una data ragione di minore inegualità, è certo, che il piccolo trilineo PIL, e la piccola area GHEF saranno espresse pel Lemma II. e suo Corollario, e perciò, che si è dimostrato da noi alla spiegazione della detta Proposizione V. al* §. Che poi il triangolo, ec. *da i due rettangoli PS×GH, ed HF×GH, i quali averanno la ragione di PS ad HF; ma pel Lemma III. il trilineo PIL è uguale al trilineo PLN, e l'area GHFE è uguale all' area GHFD; dunque il trilineo PLN sarà alla piccola area ungulare GHFD nella ragione di PS ad HF; ma la porzione della sfera PLRP è composta della somma infinita de' trilinei, come PLN, e l'ungula QHFB della somma infinita degli spazj elementarj come GHFD, che hanno la ragione di PS ad HF, cioè* [fig. 51.] *la vela PYLA, e lo scudo QRCA; dunque la vela PYLA sarà allo scudo QRCA come il seno verso PB al seno retto FS; ma pel Lemma IV. lo scudo QRCA è uguale al quadrato del raggio YK; dunque la vela PYLA sarà al quadrato del raggio come PB ad FS, cioè nella data ragione, il che, ec.*

V. Ma la Clelia della seconda descrizione non sarà lei stessa quadrabile, ma averà gli spazj trilineari interposti FGCIPEF (*fig.* 38.) esattamente quadrabili; Imperocchè sono mezze vele fiorentine del Viviani, che prese insieme sono uguali al quadrato del diametro della sfera, o sono doppie del quadrato descritto nel massimo circolo, ovvero ottuple del triangolo FBE, come ne' suoi *Vivianei* il nostro Autore ha dimostrato; Possiamo però nominare una *Clelia primaria*, quella che è descrit-

scritta nell' Emisferio, *secondaria*, quella che è descritta nell' altre porzioni.

Spiegazione. *Da questo Corollario V., e dal Corollario I. si deduce, che essendo la Clelia bifolia della prima descrizione, uguale al quadrato del diametro del circolo massimo, che è base dell' emisferio, ed essendo gli spazj trilineari F G C I P E F interposti alla Clelia della seconda descrizione, presi insieme uguali al detto quadrato, la Clelia della prima descrizione, e detti spazj, che risultano dalla Clelia della seconda descrizione descritta sull' emisferio, saranno uguali.*

VI. E qualsivoglia sua semifoglia C G F sarà doppia del semmento del quadrante circolare F H E, e l'intera Clelia bifolia sarà ottupla del medesimo semmento; essendo la medesima superficie dell' Emisferio ottupla del quadrante F H E B. Fig. 37.

Spiegazione. *La superficie dell' Emisferio è ottupla del quadrante F H E B, come che è uguale alla doppia area del circolo massimo, o base del medesimo, per quello che si è detto alla spiegazione del II. Corollario. Essendo adunque li spazj trilineari F G C I P E H F ottupli del triangolo F B E pel Corollario V., sottratti tutti questi spazj dalla superficie dell' Emisfero, resterà tutta la Clelia della seconda descrizione ottupla del semmento del quadrante F H E; e però qualsivoglia sua semifoglia sarà doppia del medesimo semmento.*

VII. Dunque l'area, ch'è interposta fra le foglie della Clelia della prima descrizione, è uguale alle foglie della Clelia della seconda descrizione; e *v. v.* l'area interposta fra le foglie della Clelia di questa è uguale alle foglie di quella; e l'una, e l'altra Clelia, tanto della prima, che della seconda descrizione, prese insieme, adeguano la superficie dell' emisfero.

Spiegazione. *Che l'area, che è interposta fra le foglie della Clelia della prima descrizione, sia uguale alle foglie della Clelia della seconda, è manifesto dal Corollario II. dove la detta area è provata il doppio del semmento Circolare F H E, di cui è doppia pel Corollario VI. l'area della*

Clelia della seconda descrizione; che poi v. v. l'area interposta fra le foglie della Clelia della seconda descrizione sia uguale alle foglie della Clelia della prima descrizione è manifesto dal Corollario I., dove la Clelia della prima descrizione è uguale al quadrato del raggio, come pel Corollario V. si prova, che l'area interposta fra le foglie della Clelia della seconda descrizione sia uguale al medesimo quadrato: dal che ne viene che l'una, e l'altra Clelia prese insieme adeguino la superficie dell' Emisfero. Poichè essendo la Clelia della prima descrizione uguale all' area interposta fra le foglie della Clelia della seconda, e la Clelia della seconda descrizione uguale all' area interposta fra le foglie della Clelia della prima descrizione, prendendo le due Clelie insieme adegueranno l'area della superficie dell' Emisfero, come ogni Clelia con l'area interposta fra le sue foglie adegua la medesima superficie.

VIII. Ma ancora qualsivoglia parti dell' uno, e dell' altro genere di Clelie distinte da varj meridiani con una tale determinazione ricevono una misura congrua, come facilmente si può dedurre da quello, che si è detto, e da quello, che si dirà; come ancora quando la Clelia della seconda descrizione averà per base un circolo della sfera minore di un circolo massimo, la sua dimensione l'averemo da ciò, che in generale s'insegnerà al Corollario I. della Proposizione IX.

PROPOSIZIONE V.

Fig. 39.

Quadrare una Clelia della prima descrizione, descritta con qualsivoglia ragione di a a b.

Sia il quadrante dell' Emisfero P A K C, che sia segato dal piano paralello all' orizzonte F E B, [il qual piano, o sia sopra il centro, come esprime la figura, o sotto, come facilmente ci potremo immaginare], che sia la base della Clelia della prima descrizione, la di cui semifoglia sia P G D; sia ancora sopra il quadrante F E B all'

all' altezza F O uguale a P B innalzata una superficie cilindrica segata per trasverso dal piano O B E, che definisca la superficie ungulare F H E N O; Tirati dunque, dove uno vorrà, due meridiani infinitamente prossimi P G H M, P *g b m*, che seghino il massimo circolo A K in M ed *m*; la base della porzione F E in H, *b*, e la Clelia in G, *g*, e tirato l'arco G I paralello ad H *b* intercetto da detti meridiani, potrà prendersi il triangolo sferico P G I per l'elemento della Clelia P G *g*, dal quale differisce con una quantità infinitamente piccola: Ma per le dottrine di Archimede quel triangolo è uguale alla superficie egualmente alta formata da un cilindro circonscritto, ed intercetta fra l'istessi piani de' meridiani, cioè a dire al rettangolo formato dal seno verso P R nell' arco M *m*; dunque ancora l'elemento dell' area della Clelia P G *g* è uguale a P R in M m. Che se l'arco H E sarà ad E Q, come ancora *b* E ad E *q* (e però H *b* a Q *q*) come *a* a *b*, e s'innalzi nella superficie dell' ungula cilindrica Q N, sarà questa al seno Q L, come F O, ovvero B P ad F B; cioè per la natura di questa Clelia, come P R alla medesima Q L, e però P R è uguale a Q N; e l'area elementare P G *g* sarà all' elemento dell' area ungulare N Q *q n* come M *m* a Q *q*, cioè nella ragion composta di M *m* ad H *b*, e di H *b* a Q *q*, la prima delle quali è come il raggio C A al raggio B F, la seconda la medesima che quella di *a* a *b*; cioè a dire posto C S a C A come *a* a *b* sarà P G *g* ad N Q *q n* come C S a B F, e questo succederà sempre; dunque tutte le piccole aree elementari della semifoglia della Clelia, che corrispondono all' arco E D, saranno a tutte le piccole aree ungulari N Q *q n*, che rispondono in numero uguale alle suddette per tutto il quadrante E F, cioè a dire la semifoglia P G D all' ungula O N E Q F, ovvero al rettangolo ad essa uguale O F B P (pel Corollario II. della Proposizione IV de' Problemi Vivianei del nostro Autore) è come C S a B F, o come C S X B P ad F B P. Sarà dunque la semifoglia della Clelia P G D uguale al rettangolo di C S in P B; dunque facilmente si quadra l'area della semifoglia,

e però tutta la Clelia sarà sempre capace di quadratura. Il che si doveva fare.

Spiegazione. *Il triangolo sferico PGI ha l'angolo IPG infinitamente piccolo per supporsi infinitamente vicini i due meridiani PGHM, Pghm; e però IG sarà un arco infinitamente piccolo, ed Ig sarà la differenza infinitamente piccola tra PG e Pg, e però ancora l'ipotenusa gG sarà infinitamente piccola; onde in riguardo al triangolo PIG, che ha i lati finiti PI, PG sarà l'istesso prendere Pg che PI, ed IG, che gG, essendo la differenza di PI a Pg, Ig infinitamente piccola, e di IG a gG molto più una differenza infinitamente piccola per essere la differenza di due infinitamente piccoli.*

Che poi il triangolo PIG sia uguale alla superficie di un Cilindro circonscritto, ugualmente alto, ed intercetta detta superficie fra i medesimi meridiani; è chiaro, se si considera, che la superficie o area di detto triangolo è uguale al rettangolo sotto PR ed Mm, e la superficie del cilindro ugualmente alta, sarà ancor essa sotto PR ed Mm. Ciò procede pel Corollario I. della Proposizione X[illegible] De Sphæra & Cilindro *di Archimede, e si prova altramente così; per la Proposizione XV. del detto Autore sarà il triangolo PMm = Mm × PC; ma per la Proposizione XVII. del medesimo i triangoli sferici PmM, PIG saranno fra di loro come PC a PR; dunque se si farà PC. PR :: Mm × PC ne verrà per quarto termine l'area del triangolo PIG = Mm × PR, e però uguale alla curva superficie del cilindro ugualmente alto, che è ancor essa sotto Mm × PR pel detto Corollario I. della Proposizione XV.*

COROLLARIO.

Da ciò si deduce la maniera di trovare l'area di un triangolo sferico isocele, che abbia per base (fig. 41.) *l'arco NL di un paralello ad AK se si farà PC. PR :: PC × AK, il quarto termine sarà PR × AK area del triangolo.*

Se s'innalzi QN nella superficie dell' ungula cilindrica, sarà questa al seno QL, come FO al raggio FB poi-

Poichè essendo QN *paralella ad* FO, *e* QL *ad* FB, *sarà il piano* NQL *paralello al piano* OFB; *onde ancora la sezione* NL *paralella ad* OB, *e però il triangolo* QNL *simile al triangolo* OFB; *onde* QN.QL::FO.FB.

E l'area elementare PGg *sarà all' elemento dell' area ungulare* NQqn *come* Mm *a* Qq; *e ciò perchè si è dimostrato di sopra, che* PR×Mm *è uguale all' area elementare* PGg, *ed essendo l'elemento dell' area ungulare il rettangolo* NQqn, *ovvero (per essere* NQ=PR *pel detto nella presente Proposizione*), PR×qQ *sarà per conseguenza l'area elementare* PGg *all' elemento* NQqn *come* Mm *a* Qq.

Dal che si deduce, che essendo Mm *a* Qq *nella ragion composta di* Mm *ad* Hh, *e di* Hh *a* Qq, *sarà ancora lo spazio elementare* PGg *all' elemento* NQqn *nella medesima ragione composta; ma* Mm *ad* Hh *è come il raggio* CA *al raggio* BF *(per essere* Mm, Hh *archi simili di due circoli paralelli, e però fra di loro come il raggio* CA *al raggio* BF), *la seconda ragione la medesima che quella di* a *a* b; [*essendosi veduto di sopra che* Hh *a* Qq *come* a *a* b]; *dunque posto* CS *a* CA, *come* a *a* b, *sarà* PGg *ad* NQqn, *come* CS *a* BF; *e ciò per la ragione perturbata, poichè si trova come* Mm *ad* Hh, *così* CA *a* BF, *e come* Hh *a* Qq *così* CS *a* CA, *e però sarà ex æqualitate perturbata* Mm *a* Qq, *cioè* PGg *ad* NQqn, *come* CS *a* BF.

COROLLARJ.

I. Poichè per la Proposizione II. di questa II. Parte il numero delle foglie della Clelia è all' unità come 2 *b* ad *a*, ovvero come 2AC a CS sarà il numero delle semifoglie ad una semifoglia, ovvero a CS in BP come 4AC a CS; e però l'intera Clelia stanti ferme le condizioni asserite in detta Proposizione e suo Scolio, sarà uguale al rettangolo formato da 4AC (ovvero dal doppio diametro) nell' altezza PB.

Spiegazione. *Che il numero delle semifoglie sia ad una*

una semifoglia come $4AC$ *a* CS *si prova; poichè essendo per la Proposizione II. della II. Parte il numero delle foglie della Clelia ad una foglia come* 2b *ad* a *sarà il numero delle semifoglie ad una foglia intera, o a* 2. *semifoglie come* 4b *a* 2a, (*per essere come il numero delle foglie ad una foglia, così il numero delle semifoglie a* 2. *semifoglie, e però* $2b . a :: 4b . 2a$); *onde il numero delle semifoglie sarà ad una semifoglia come* 4b *ad* a *o* $4AC$ *a* CS. *Che poi l'intera Clelia sia uguale al rettangolo* $4AC \times BP$, *si prova così. L'intera Clelia è a* $CS \times BP$ *come* $4AC$ *a* CS; *cioè* $Clelia . CS \times BP :: 4AC . CS$; *onde ne verrà* $Clelia \times CS = 4AC \times BP \times CS$, *cioè la Clelia uguale a* $4AC \times BP$: *ovvero si faccia* $CS . 4AC :: CS \times BP$; *il quarto termine sarà il valore della* $Clelia = 4AC \times BP$.

II. E però la medesima superficie della Clelia, di cui si parla, è doppia del quadrato della sottesa PF, che è media proporzionale fra il diametro della sfera e l'altezza della porzione; ovvero è uguale al quadrato inscritto nel circolo del raggio PF.

Spiegazione. *Essendo pel Corollario I. l'intera Clelia uguale al rettangolo fatto dal doppio diametro della sfera nell'altezza PB; ed essendo (per Euclide) nel circolo massimo della sfera, FP media proporzionale fra il diametro della sfera e l'altezza PB; cioè* $\overline{FP}^2$ *uguale al rettangolo del diametro della sfera nell'altezza PB, di cui è doppio il rettangolo sotto il doppio diametro e l'altezza PB, ed a questo è uguale pel I. Corollario l'intera Clelia, sarà per conseguenza la medesima doppia del quadrato della sottesa FP; ovvero uguale al quadrato inscritto nel circolo del raggio PF; poichè (come è facile a provarsi) il quadrato inscritto nel circolo è doppio del quadrato del raggio.*

III. E perchè la superficie sferica di quella porzione, in cui si descrive la Clelia, è uguale al circolo, che abbia per raggio la sottesa PF per Archimede, però tutti gl' interstizj interposti alle foglie della Clelia sono ugua-

uguali a i quattro femmenti refidui quadrantali, che rimangono al medefimo circolo detratto l'infcritto quadrato.

Spiegazione. *Eſſendo la ſuperficie sferica di quella porzione, in cui ſi deſcrive la Clelia, uguale al circolo, che abbia per raggio la ſteſſa P F per la Propoſizione XVI.* de Sphæra & Cilindro *di Archimede; ed eſſendo pel Corollario II. la ſuperficie della Clelia uguale al quadrato inſcritto nel medeſimo circolo; ne viene che detratte le foglie della Clelia dalla ſuddetta porzione di sfera, e detratto dal circolo uguale alla porzione di sfera, in cui è deſcritta la Clelia, il quadrato inſcritto uguale alla Clelia; gl' interſtizj interpoſti fra le foglie della Clelia ſaranno uguali a i quattro reſidui ſemmenti quadrantali del medeſimo circolo.*

IV. Se in varie porzioni della medefima sfera fi defcrivano tali Clelie faranno le loro aree tra di loro nella ragione dell' altezze di tali porzioni.

Spiegazione. *In primo luogo debbe ſupporſi, che le porzioni della medeſima sfera ſieno tagliate da' circoli paralelli; poichè allora le ſuperficie di dette porzioni ſaranno tra di loro come l'altezze delle medeſime (pel Corollario II. della Propoſizione XIII. Sezione I. del calcolo integrale di Carrè, e per la Propoſizione XVII. de* Sphæra & Cilindro *di Archimede); ma per la 16. di Archimede la ſuperficie di dette porzioni sferiche è uguale al circolo, che abbia per raggio la loro ſotteſa come P F, e queſti circoli ſono fra di loro come i quadrati de' raggi, o come i quadrati inſcritti ne' medeſimi circoli, che ſono doppj de' quadrati de' raggi, i quali quadrati inſcritti ne' circoli, che hanno per raggio le ſotteſe tirate dalla ſommità de' ſemmenti sferici alla loro baſe, ſono uguali alla ſuperficie delle Clelie pel Corollario II., ne ſegue che ancor queſte ſaranno come detti circoli, o come le ſuperficie delle porzioni sferiche, nelle quali ſono deſcritte, cioè, come l'altezze di tali porzioni.*

V. Tutte le Clelie della prima defcrizione defcritte nella medefima porzione sferica fecondo qualfivoglia ra-

ragione di *a* a *b* faranno fempre uguali, come che fono doppie del quadrato della medefima fottefa tirata dal polo al margine della bafe pel Corollario II.

PROPOSIZIONE VI.

Fig. 40.

D*Eterminare la mifura della Clelia della feconda defcrizione qualunque fia la fua ragione di* a *a* b.

Sia dunque la Clelia della feconda defcrizione già defcritta, l'innografia della femifoglia P G *g* D farà la femifoglia della Rodonea della medefima ragione D I B; fe fi farà come *a* a *b*, così l'arco H E all' arco E Q, farà il feno retto di quefto Q L uguale al ramo B I, ed il feno del compimento Q N farà uguale al lato I G del cilindro innalzato fopra la Rodonea, che col fuo termine G defcrive nella fuperficie emisferica il perimetro della Clelia; ma l'elemento dell' area intercetta fra P G D perimetro della Clelia, ed il meridiano P E, che la tocca nel polo P è il trapezio G *g* *b* H, che per le dottrine di Archimede è uguale al rettangolo di H *b* in I G; onde all' elemento dell' ungula del cilindro innalzato fopra il quadrante F D E B all' altezza B P uguale al raggio B E, fegata detta ungula da un piano, che paffi per E B, ed inclinato al piano F E B per 45 gradi (la quale ungula farebbe la linea de' feni Q N innalzati fopra l'arco F Q), cioè al rettangolo di Q N in Q *q* farà come l'arco H *b* all' arco Q *q* cioè come *a* a *b*, e quefto fuccederà fempre; onde tutti gli elementi dell' aree comprefe fra la foglia della Clelia, ed il meridiano, che la tocca nel polo P, ad altrettanti elementi di quella fuperficie ungulare, cioè al quadrato del raggio F B farà nella medefima data ragione di *a* a *b*; e duplicando gli antecedenti tutto lo fpazio racchiufo tra due foglie della Clelia è al quadrato del raggio come 2 *a* a *b*. Ma per quello che fi è dimoftrato, il numero delle foglie, e però il numero degli fpazj interpofti fra due foglie farà all' unità come 2 *b* ad *a*, ovvero come 4 *b* a 2 *a*; dunque tutti infie-

insieme gli spazj interposti alle foglie della Clelia descritte nell' Emisferio, sono al quadrato del raggio della sfera come 4*b* a b; cioè nella ragione quadrupla, e però sono doppj del quadrato descritto nel circolo massimo: ed essendo la superficie dell' Emisferio doppia del medesimo circolo massimo, saranno dunque tutte insieme le foglie della Clelia doppie degli altri semmenti quadrantali, che rimangono nel circolo, tolto il quadrato inscritto; il che, ec.

Spiegazione. *Che il seno retto QL sia uguale al ramo BI della Rodonea, ciò succede per la natura della Rodonea BID. Che poi il seno del compimento QN sia uguale ad IG, si prova. Perchè il quadrante sferico dell' Emisferio FPB è uguale al quadrante FBE della base; ed essendo LQ seno dell' arco QE, sarà ancora BI =(LQ) = RG seno dell' arco PG, che però sarà PG uguale all' arco EQ. Levando dunque dagli uguali PGH, FQE gli archi uguali PG, EQ, resteranno uguali gli archi QF, GH, e però i loro seni QN, GI uguali.*

Che poi il trapezio GghH *sia uguale al rettangolo* HhXIG *si ricava; che essendo pel Corollario I. della Proposizione XV.* De Sphæra & Cilindro *di Archimede il triangolo sferico PhH uguale al rettangolo* hHXPB, *come ancora il triangolo PGM [con immaginarsi tirato l'arco paralello GM descritto dal polo P], ovvero il triangolo PGg, che per quello si è detto nella Proposizione antecedente, è l'istesso, che il triangolo PGM, sarà uguale per quello si è dimostrato nella Spiegazione della Proposizione V. di questa II. Parte ad* hHXPR; *dunque levando dagli uguali PhH e* hHXPB, PgG = hHXPR *resterà il trapezio* GghH *uguale al rettangolo RB[IG]XhH.*

Si asserisce, che l'ungula del cilindro innalzato sopra il quadrante FDEB all' altezza BP uguale al raggio BE, sarà segata da un piano, che passi per EB, e che sia inclinato per 45. gradi sopra il piano FEB [fig. 39.]. *Questo è, perchè essendo FO altezza dell' ungula = al raggio FB, l'angolo OBF è semiretto, e però di gradi 45; ma detto angolo misura l'inclinazione del piano, che taglia l'ungula col piano EFB base del cilindro; dunque, ec.*

Si asserisce di più dal nostro Autore, che la superficie ungulare sia uguale al quadrato del raggio della base dell' Emisfero; e ciò perchè detta superficie ungulare pel Corollario II. della Proposizione IV. de i suoi Vivianei, è uguale al rettangolo F B P, *cioè al quadrato del raggio* F B *per esser* F B = B P; *e perciò, che si dimostra ancora da noi allo Scolio del Problema principale del Leinizio.*

Essendo il numero delle foglie all' unità come 2 b *ad* a *per la Proposizione II. di questa II. Parte, ancora gli spazj, che sono interposti fra due foglie, presi insieme saranno come* 2 b *ad* a. *Poichè sempre il numero delle foglie sarà uguale al numero di questi spazj: onde i detti spazj averanno ad uno di loro la medesima ragione, che hanno le foglie della Clelia all' unità.*

Essendo per ultimo la superficie dell' emisferio doppia del suo circolo massimo; come che la superficie dell' emisferio è uguale al rettangolo $4 FHE \times BP$, *e quella del circolo massimo* $4 FHE \times \frac{1}{2} BP$ ($\frac{1}{2} BF$) *per la Proposizione XIII. I. Parte del Calcolo integrale di* Carrè; *o come si deduce dalla Proposizione XI. di Archimede* De Sphæra & Cilindro: *ed essendosi provato in questa Proposizione, che gli spazj interposti fra le foglie della Clelia sono doppj del quadrato inscritto nel circolo massimo, levando dalla superficie dell' emisferio i detti spazj, e dal circolo massimo il quadrato descritto nel medesimo, resteranno tutte le foglie della Clelia doppie de' semmenti quadrantali, che rimangono nel circolo levato il quadrato inscritto.*

COROLLARJ.

I. Qualunque siasi la ragione di *a* a *b*, tutte le Clelie della seconda descrizione formate nella medesima superficie emisferica saranno uguali; *come che sono doppie de' semmenti medesimi quadrantali, che rimangono nel circolo massimo, levato il quadrato inscritto.*

II. Le frondi di qualunque Clelia della seconda descrizione sono uguali agli spazj interposti fra le frondi

di di qualsivoglia Clelia della prima descrizione; e *v. v.* le foglie di queste sono uguali agli spazj interposti fra le frondi di quella.

Spiegazione. *Le frondi suddette per la presente proporzione sono doppie de' semmenti quadrantali del circolo massimo dell' emisfero, in cui è descritta la Clelia della seconda descrizione; ma gl' interstizj interposti alle foglie della Clelia della prima descrizione sono uguali a i 4 residui semmenti quadrantali, che rimangono al circolo fatto dalla sottesa P F, come raggio pel Corollario III. della Proposizione V., il quadrato della quale essendo doppio de' quadrati F B, o B P, sarà il circolo, che ha per raggio la sottesa P F, doppio del circolo massimo della base dell' emisfero, che ha per raggio F B; e però anche il quadrato inscritto nel primo sarà doppio del quadrato inscritto nel secondo; (per essere i quadrati inscritti ne' circoli doppj de' quadrati de' raggi) e però i semmenti residui quadrantali del primo saranno doppj de' semmenti residui quadrantali del secondo: onde saranno i semmenti residui quadrantali del primo uguali alle foglie della Clelia della seconda descrizione, come che ancora queste sono doppie de' semmenti quadrantali del circolo massimo per quello si è dimostrato nella presente Proposizione. Ma a i detti semmenti quadrantali del primo circolo sono uguali gli spazj interposti fra le foglie della Clelia della prima descrizione, pel Corollario III. della Proposizione V; dunque i detti spazj sono uguali alle foglie della Clelia della seconda descrizione.*

Vice versa le foglie della Clelia della prima descrizione sono uguali agli spazj interposti fra le foglie della Clelia della seconda descrizione; perchè questi (come si prova nella Proposizione VI.) sono doppj del quadrato inscritto nel circolo massimo dell' emisfero, del quale quadrato è ancora doppio il quadrato inscritto nel circolo, che ha per raggio la sottesa P F; (come che il quadrato inscritto nel circolo formato dal raggio P F al quadrato inscritto nel circolo, che ha per raggio P B o F B, ha l'istessa proporzione, che hanno i quadrati del raggio P F, al quadrato del raggio

PB, (come si è veduto di sopra); ma il quadrato del raggio PF, è doppio del quadrato del raggio PB o FB, ec.) dunque il quadrato inscritto nel circolo, che ha per raggio la sottesa PF, sarà uguale agli spazj interposti fra le foglie della Clelia della seconda descrizione; e però la Clelia medesima della prima descrizione, che è uguale a detto quadrato, per essere doppia, come il detto quadrato del quadrato della sottesa PF pel Corollario V. della Proposizione V. sarà uguale agli spazj interposti fra le foglie della Clelia della seconda descrizione.

III. Onde la somma fatta dalla Clelia della prima descrizione, e dalla Clelia della seconda, descritte amendue nella superficie del medesimo Emisfero, sarà uguale alla superficie curva del medesimo emisfero.

Spiegazione. *Ciò è chiaro; perchè la Clelia della prima descrizione è uguale agli spazj interposti fra le foglie della Clelia della seconda descrizione; e la Clelia della seconda descrizione è uguale agli spazj interposti fra le foglie della prima, pel Corollario antecedente: Ma la superficie sferica dell' Emisferio è uguale ad ognuna delle due Clelie, ed agli spazj inrerposti fra le foglie della medesima; dunque sarà uguale alla somma delle due Clelie.*

IV. I medesimi spazj interposti fra le foglie della Clelia della seconda descrizione, sono doppi del quadrato della sottesa PF tirata dal polo al margine della base dell' Emisfero, e le foglie della medesima sono uguali a 8 semmenti circolari del circolo formato col raggio BF; imperocchè sono doppie de' 4 semmmenti, che rimangono al circolo massimo, levato il quadrato della sottesa del quadrante.

Spiegazione. *Poichè i detti spazj pel Corollario II. sono uguali alle foglie della Clelia della prima descrizione, le quali sono uguali al quadrato inscritto nel circolo, che ha per raggio la sottesa FP, del quadrato della quale è doppio il quadrato inscritto nel detto circolo; e però i detti spazj saranno doppj del quadrato della sottesa FP, ec.*

V. Singolarmente si può notare, che ancora le parti degl' interstizj della Clelia della seconda descrizione

zione, come i trilinei DGH, faranno uguali ciascheduni alla porzione ungulare, che risponde all' arco FQ; cioè a dire al rettangolo BFN o BHI.

Spiegazione. *Secondo che mi accenna il medesimo Autore, è corso errore in questo Corollario, dovendo dire coerentemente al dimostrato nella Proposizione, che quei trilinei DGH sono alla porzione ungulare corrispondente all' arco FQ, cioè al rettangolo BFN, ovvero BHI come* a *a* b; *o pure si potrebbe dire, che tutti i trilinei simili a DGH* [fig. 40.] *presi insieme uguagliano il quadruplo della corrispondente porzione ungulare insistente sull' arco FQ, cioè il quadruplo del rettangolo BFN, ovvero BHI. La dimostrazione della quale particolarità dipende da ciò, che si dimostra dell' ungula cilindrica nella figura* 52.; *cioè, se sarà sopra il quadrante circolare EFB eretta un' ungula cilindrica ADFQE, segata dal cilindro col piano ABF inclinato al piano del quadrante suddetto ad angolo semiretto, di maniera che l'altezza AE pareggi il raggio BE. La similitudine de' triangoli DNQ, BAE ci darà sempre altresì DQ = al seno QN (per esser AE = BE); ed è il raggio BF, ovvero B*q *al seno* qn, *ovvero alla retta* qd *eretta nella superficie cilindrica ungulare, come l'elemento dell' arco =* Qq *all' elemento del seno verso* Nn [*come si prova alla spiegazione della seconda dimostrazione della Proposizione VII; Dunque il rettangolo del raggio BF in* Nn *uguaglia il rettangolo* dqQ *elemento della superficie ungulare, e ciò sompre; è però lo spicchio DFQ composto d'infiniti tali rettangoletti* dqQ *uguaglia il rettangolo BFN composto de' rettangoli del raggio BF in tutti gli elementi* Nn *del seno verso FN. Ma si è provato nella Proposizione essere sempre QN in* qQ, *cioè DQ in Q*q *elemento della superficie ungulare al trapeziolo elementare* GHhg (fig. 4-.), *cioè al rettangolo di GI in H*h (*essendo QN = GI*) *come Q*q.Hh::b.a, *e conseguentemente questo a quello nella data ragione di* a *a* b; *dunque anche tutto il trilineo DGH* (fig. 40.) *è alla porzione ungulare DFQ* (fig. 52.), *o al rettangolo BFN uguale a DFQ, come si è provato, o all' uguale BHI* (fig. 40.) *come* a *a* b. *E nella*

E nella maniera, che si è provato nella Proposizione essere tutti insieme gl' interstizj della Clelia quadrupli del quadrato del raggio, o sia del rettangolo di BF nell' istessa FB, mostrerassi la somma de' suddetti spicchi DGH quadrupla del rettangolo BFN, ovvero BHI, (essendo BI = BN, e però il resto FN = HI). Poichè duplicando gli antecedenti, come in detta Proposizione, tutti gli spicchi DGH interposti tra due foglie, saranno al rettangolo BHI come 2a *a* b. *Ma per quello, che si è dimostrato, il numero delle foglie, e però il numero degli spicchi fra due foglie sarà all' unità, come* 2b *ad* a, *o come* 4b *a* 2a; *dunque tutti insieme gli spicchi DGH interposti alle foglie della Clelia descritte nell' emisferio, sono al rettangolo BHI, come* 4b *a* b.

VI. Merita ancora osservazione, che l'istesso arco del meridiano PG è uguale all' arco EQ, a cui l'arco DE è nella ragione di *a* a *b*; imperocchè sono uguali i loro seni GR e BI, o QL; di maniera che una tal Clelia averà una facile generazione da un doppio moto equabile: l'uno del meridiano PE mosso circolarmente per l'arco EH, e l'altro del punto mobile P, che scende per quello fino all' orizzonte, di maniera che le velocità de' moti sieno come *a* a *b*; imperocchè così gli spazi passati EH, PG saranno nella medesima ragione.

Spiegazione. *Essendo gli spazj passati con moto equabile, ma con velocità e tempi disuguali nella ragione composta de' tempi, e delle velocità per la Proposizione V. Parte I. del mio* Paragone de' Canali; *se i detti spazj saranno passati nel medesimo tempo, saranno come le velocità. Il che ancora più brevemente si prova per la Proposizione I. Parte I. del detto mio Trattato.*

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

Trovare la misura della Clelia della seconda descrizione descritta in una porzione minore dell' emisferio in qualsivoglia ragione data. Fig. 41.

Sia la semifoglia della Clelia P G g F descritta nel settore della sferica porzione P F E B, la di cui base sia il settore F E B, ed in quello sia inscritta la semifoglia della Rodonea B I F, che sia sottoposta innograficamente alla Clelia P G F; B A sia uguale al raggio della sfera, e l'arco A M K concentrico all' arco F H E, e tirato arbitrariamente il meridiano P G H, la di cui comune sezione colla base sia il raggio B H, che tagli la Rodonea in I, e che sia prolungato in M all' arco A K, e tirato il seno G R dell' arco P G racchiuso dentro la Clelia, il qual seno sarà uguale al ramo B I della Rodonea: Si ordini R S uguale all' arco K M, e con una simile costruzione fatta, dove ciascuno vorrà, ne nasca la figura P S O B, la quale dico che sarà uguale allo spazio interposto nella superficie sferica fra il Perimetro della Clelia, ed il meridiano P L E, dal quale è toccata nel polo P, cioè a dire all' area F G P L E.

Imperocchè tirato un altro meridiano P *h* infinitamente vicino al meridiano P H, e compita la medesima costruzione; poichè R S è uguale all' arco M K, *r s* all' arco *m* K, è manifesto, che la differenza dell' una e dell' altra V *s* sarà uguale all' arco M *m*, il quale essendo simile all' arco H *h*, e tagliato nel circolo massimo della sfera, sarà il rettangolo di M *m* nell' altezza G I o B R = T S, uguale al piccolo spazio elementare G H *h g* intercetto nella superficie sferica da que' due meridiani, e sottoposto al perimetro della Clelia.

Questo spazio dunque elementare sarà uguale al piccolo spazio S T *t s*, che parimente non differisce dal rettangolo V *s* o T *t* in T S; il che succedendo sempre, è manifesto, che tutta l'area P S O B sarà uguale a detto spazio

ſpazio interpoſto fra la Clelia, la baſe della porzione sferica, ed il meridiano PLE; cioè a dire alla figura FGPLE; il che, ec.

Spiegazione. *Che il rettangolo di* Mm *ſotto l'altezza GI o BR o TS ſia uguale al piccolo ſpazio elementare* GHhg, *è manifeſto per Archimede, come ſi accenna nella Propoſizione V. alla ſpiegazione.*

Che detto ſpazio ſia uguale al piccolo ſpazio STts, *è pur manifeſto; perchè eſſendo uguale il detto ſpazio elementare* GHhg, *per Archimede, al rettangolo ſotto GI ed* Mm, *come ſi è dimoſtrato, ed eſſendo GI=TS, ed* Mm = Tt *per conſtruzione, ſarà il rettangolo ſotto TS e T*t *uguale al rettangolo ſotto GI ed* Mm. *Ma il rettangolo ſotto ST e T*t *non differiſce dallo ſpazio elementare* STts, *che pel triangolo infinitamente piccolo SV*s*; dunque lo ſpazio* STts *ſarà uguale al rettangolo* ST*t, e però al rettangolo GI X* Mm, *cioè allo ſpazio elementare* GHhg.

Altramente.

Fig. 41. Si tiri nella ſuperficie sferica col raggio RG l'arco GL, a cui nella baſe corriſponderà l'arco uguale IQ, e ſarà MK o RS ad IQ, o GL come MB a BI; cioè, come il raggio della sfera al ſeno GR, o come l'elemento dell' arco L*l* all' elemento del ſeno verſo R*r*; e però il prodotto degli eſtremi SR*r* (cioè la piccola aria SR*rs*) ſarà uguale al prodotto de' mezzi, cioè dell' arco GL nell' elemento L*l* [cioè alla piccola Zona sferica GL*lg*], e queſto ſuccederà ſempre; dunque tutta la figura PSOB ſarà uguale a detto ſpazio FGPLE; il che, ec.

Spiegazione. *Che MK o RS ſia ad IQ o GL come l'elemento dell' arco* Ll *all' elemento del ſeno verſo* Rr, *ovvero nella figura* 53. *MK.IQ::* [lg] Ll.Rr *ſi fonda ſull' eſſere MK.IQ::MC.CI::C*l.lr; [*per eſſere CM= C*l, *e CI=* lr, *e per la ſimilitudine del triangolo C*lr *coll' infinitamente piccolo L*al, (*per eſſere gli angoli ad* r *ed* a *retti, e l'angolo C*lr *compimento al retto* C*l*L *dell' angolo* Lla, *e però uguale all' angolo* a Ll *compimento del medeſimo angolo ad un retto*); *ovvero con quello che*

lo, che l'ordinata r l *colla tangente del cerchio prolungata fino al concorso coll' asse R P conterrebbe, sarà* C l . l r : : L l . L a ; *dunque* M K . I Q : : L l *elemento dell' arco* . R r *elemento del seno verso* .

COROLLARJ.

I. Di quì si deduce, che la semifoglia della Clelia sarà uguale alla residua figura P S O X, la quale compisce il rettangolo P B O X, che uguaglia la superficie sferica del settore F P L E per essere il prodotto di B O, ch' è uguale all' arco A K nell' altezza P B di detta porzione di sfera per Archimede, Corollario I. Proposizione XV. de *Sphæra & Cilindro*.

II. Dalla prima dimostrazione si ha, che ancora la parte H G P E è uguale all' area P B T S; e che il rimanente trilineo F G H uguaglia il residuo trilineo S T O.

Spiegazione. *La ragione, perchè ancora la parte H G P E in vigore della prima dimostrazione sia uguale all' area P B T S, proviene da questo, che secondo le regole del calcolo integrale il piccolo spazio elementare* G H h g, (*o* G I X M m *per quello, che si è dimostrato nella spiegazione della Proposizione V.*), *è tanto un elemento dello spazio* H G P E, *che di tutta la figura, come l'elemento* S T t s *è l'elemento dell' area* P B T S, *e di tutta la figura* P S O B ; *ma l'elemento* S T t s *si è provato uguale nella prima dimostrazione all' elemento* G H h g, *e gli spazj che hanno gli elementi respettivi uguali, sono uguali; dunque lo spazio* H G P E *sarà uguale allo spazio* P B T S ; *onde levando detti spazj uguali dagli uguali spazj* F G P E, P S O B, *resteranno uguali i trilinei* F G H *ed* S T O.

III. Dalla seconda dimostrazione si raccoglie, che la parte P G L sarà uguale alla porzione P R S; ed il rimanente G L E F uguale ad R S O B, come il quadrilineo G L E H è uguale al rettangolo R S T B.

Spiegazione. *L'istesso discorso, che si è fatto nella precedente spiegazione, si debbe fare nella presente. Lo spazio elementare* G L l g *per la seconda dimostrazione si è*

 trova-

trovato uguale allo spazio SRrs, e come lo spazio GLlg è un elemento dello spazio PGL, e lo spazio SRrs è pure un elemento dello spazio PRS; ed essendo uguali i detti elementi saranno ancora uguali gli spazj PGL, PRS: i quali detratti prima dagli uguali FGPLE, BPSO resteranno uguali GLEF ed RSOB, e detratti dagli uguali HGPE, PBTS [pel II. Corollario] resteranno uguali il quadrilineo GLEH ed il rettangolo RSTB.

IV. Ma ancora le parti della semifoglia hanno nella figura PSOX le parti, che lor corispondono. Imperocchè il trilineo NFG sarà uguale ad SOY, ed NGP sarà uguale alla rimanente area PSYX, ed il bilineo GP sarà uguale al trilineo P*n*S.

Spiegazione. *In primo luogo il settore sferico PFE, o il rettangolo PB X AK per Archimede, sarà uguale al rettangolo PBO per costruzione, per essere BO = AK; e per la presente Proposizione lo spazio FGPE è uguale allo spazio PSOB; dunque levando dal settore sferico PFE lo spazio FGPE, e dal rettangolo PBO lo spazio PSOB, resterà la semifoglia FGPNF uguale allo spazio PSOX; il che è spiegato ancora nel I. Corollario di questa.*

In secondo luogo il settore sferico PNL, o il rettangolo AK X PR per Archimede è uguale al rettangolo PRT; dunque levando dal settore PFE il settore PNL, e dal rettangolo PBO il rettangolo PRT, resteranno uguali il quadrilatero NFEL, ed il rettangolo RBO.

In terzo luogo il quadrilatero FGLE è uguale ad RSOB pel Corollario III., levato dunque FGLE da FNLE, e l'uguale RSOB da RBO, resteranno uguali il trilineo NFG, ed SOT; dunque il resto della semifoglia NGP (detratto dalla semifoglia il trilineo NFG, e da PSOX l'uguale SOT) sarà uguale alla figura PSTX.

In quarto luogo essendo il settore sferico PGL, o per Archimede il rettangolo MK X PR, uguale al rettangolo PRS per costruzione, ed essendo il trilineo PGL uguale alla porzione PSR (pel III. Corollario), levando il trilineo PGL dal settore sferico PGL, e l'uguale PSR dal

dal rettangolo PRS, *resteranno uguali il bilineo P G, ed il trilineo P* n S.

V. Succedendo tutto questo in qualsivoglia ragione di *a* a *b* nella Rodonea, da cui dipende la formazione della Clelia, è manifesto che servirà l'istessa costruzione, quando la ragione di *a* a *b* è ragione di uguaglianza; cioè a dire, quando nella figura 42. la semifoglia della Rodonea sarà il semicircolo FIB, che doverà tagliare la porzione minore della superficie sferica: nel qual caso il settore circonscritto al circolo, sarà il quadrante AMK, ed IB o GR è il seno dell' istesso arco HE, ed il suo compimento HD è al seno MO dell' arco AM nella data ragione de' raggi FB o HB, ed AB.

Spiegazione. *Quando la ragione di* a *a* b *è la ragione di uguaglianza, sarà il numero delle foglie della Rodonea ad* 1 *come* 2b *ad* a, *cioè, come* 2 *ad* 1; *dunque le semifoglie saranno* 4, *e saranno contenute ciascheduna da un quadrante: ed essendo la proporzione di* EH *ad un altro arco, cioè di* a *a* b, *la proporzione di uguaglianza sarà per conseguenza* BI *uguale ad* HN, (*che c'immagineremo tirata dal punto* H *perpendicolare a* BE) *seno dell' arco medesimo* HE, *ed essendo gli angoli* FBH, BHN *uguali, ed* FB = BH, *e* BI = HN, *saranno ancora i triangoli* FIB, BHN *uguali, ed i lati* FI, NB; *dunque ancora gli angoli* HNB, FIB. *Ma* HNB *è retto per costruzione; dunque ancora sarà retto l'angolo* FIB, *e così sempre, e però il perimetro della semifoglia* FIB *sarà un semicircolo; il che si dimostra ancora nella Proposizione VI. della I. Parte.*

Il compimento adunque HD *del seno dell' arco* HE *sarà al seno* MO *dell' arco* AM *nella data ragione de' raggi* FB *ad* AB, *cioè di* BH *a* BM; *il che è chiaro per li triangoli simili* BDH, BOM.

PROPOSIZIONE VIII.

ig. 43. *Trovare una periferia elittica uguale alla curva di una Clelia della seconda descrizione PGD, delineata nell' Emisferio, la di cui innografia sia la Rodonea BID.*

Avendo fatto PB a BQ come b ad a, e descritto il quadrante circolare PFK, e descritto co' semiassi QB, e KB il quadrante elittico QVK, è chiaro dalla Proposizione XI. della I. Parte, che la curva della semifoglia della Rodonea BID sarà uguale alla periferia del quadrante Elittico QVK. Si ponga adunque BS uguale alla sottesa dell' istesso quadrante elittico QK, che possa i quadrati di QB e BK, e co' semiassi SB e BK si descriva una nuova elisse STK; dico che questa sarà uguale alla curva della semifoglia della Clelia data PGD.

Imperocchè si tirino i meridiani PGH, P$g$$h$ infinitamente vicini, e sia l'arco gL la comune sezione del Cilindrico innalzato sopra l'arco della Rodonea Ii col piano rgL paralello alla base ABE, che sarà uguale all' arco Ii, e tirato il seno GR, si tirino al quadrante circolare PKB l'ordinate RF, rf, e pe' punti F ed f si ordinino all' asse BK delle due Elissi QK, SK le rette MVT, mut; dunque [pel Corollario VI. della Proposizione VI. di questa II. Parte] l'arco del meridiano PG, o PF sarà quello, che è all' arco HE come b ad a; e però per la costruzione data nella Proposizione XI. della I. Parte sarà l'arco Vu uguale all'arco Ii, o gL, ed il quadrato di gL sarà uguale a' quadrati di uX, ed XV. Ma come SB a BQ, cioè come la radice de' quadrati di BK e di BQ presi insieme a BQ, ovvero (per la proporzionalità de lati BK e BQ con b ed a, nella qual ragione per la Proposizione VII. della I. Parte, sono Rr, e l'arco IY simile e concentrico ad Hb) come la radice di bb ed aa presi insieme ad a, o come la radice de' quadrati Rr ed IY al quadrato IY, così TM ad MV, e tm ad mu, e TO ad VX. Adunque come la somma de'

de' quadrati di R r ed I Y al quadrato di I Y, così il quadrato di T O al quadrato di V X, come si è mostrato in detta Proposizione XI. della I. Parte; dunque la somma de' quadrati di R r, e di I Y è uguale al quadrato di T O; ed aggiunti i quadrati uguali di Y i, e di O t, ovvero fz (giacchè l'uno, e l'altro è uguale alla differenza de' seni dell' arco P G, o P F, saranno tre quadrati di I Y, Y i, e di R r, o i quadrati di I i, o di g L col quadrato di R r o G L, cioè il quadrato di G g uguale a i quadrati di T O, O t cioè al quadrato di T t; e però la piccola porzione G g della curva della Clelia è uguale al piccolo arco T t del quadrante Elittico, e questo si dimostrerà sempre negli archi corrispondenti; dunque la curva, che circonda la semifoglia della Clelia P G D, è uguale al quadrante della periferia elittica S T K; il che, ec.

Spiegazione. *Che il quadrato di* g L *sia uguale a i quadrati di V X, ed* X u; *è chiaro, se si considera che il quadrato di* g L *si è provato uguale al quadrato di V* u, *che è uguale a i quadrati di V X ed* X u.

Ma come S B a B Q, così T M ad M V. Ciò è evidente; perchè per la Proposizione L. delle Sezioni Coniche del nostro Autore, sarà come B Q a B P, così M V ad M O; e potendosi provare nell' istesso modo, che si prova nella suddetta proposizione, che B P sarà a B S come M O ad M T; ne viene per l'ugualità ordinata come B Q a B S, così M V ad M T, e convertendo come B S a B Q, così M T ad M V; e provandosi l'istesso di m t *ad* m u, *saranno ancora i residui T O . X V : : B S . B Q; cioè come la radice de' quadrati di B K e di B Q a B Q, per costruzione; per essersi fatto B S uguale alla corda Q K, che è la radice de' quadrati B K + B Q.*

Ovvero come la radice de' quadrati di R r *e di I Y ad I Y; ciò è chiaro, quando si dimostri, come si è fatto nella Proposizione VII. della I. Parte, che R* r *è ad I Y come* b *ad* a.

Imperocchè tirati nella Rodonea della base B I D i raggi infinitamente vicini B I H, B i h, e tirati i seni corrispon-

ſpondenti RF, rf, *che ſieno uguali a i rami intercetti* BI, Bi *e deſcritto l'arco concentrico* IΥ, *ſarà l'elemento* BIi *della ſemifoglia della Rodonea all' elemento* RFfr *del quadrante, come la metà dell' arco* IΥ *ad* Rr *per eſſere la baſe* Bi, *e la baſe* rf *del triangolo elementare* BiI, *e del rettangolo elementare* RFfr *uguali; dunque il doppio di* BiI *ad* RFfr *è come* IΥ *ad* Rr, *cioè nella ragione compoſta di* IΥ *ad* Hh, *e di* Hh *ad* Ff, *e di* Ff *ad* Rr. *Ma perchè per la Teoria degl' infinitamente piccoli* Ff *ad* Rr *è come il raggio* Bf *al ſeno* rf, *cioè come* BH *a* BI, *o* Hh *ad* IΥ, *e la ragione di* Ff *ad* Rr *elide la ragione uguale e reciproca di* IΥ *ad* Hh, *rimane adunque, che la ragione di* IΥ *ad* Rr *ſia la medeſima, che quella di* Hh *ad* Ff. *Ma queſta è la medeſima, che quella di* a *a* b, *eſſendo in tal ragione tanto* EH *a* PF (*che ha il ſeno uguale al ramo* BI) *che* Eh *a* Pf; *dunque ancora il reſiduo* Hh *ad* Ff; *e però* IΥ *ad* Rr *è come* a *a* b; *e convertendo* Rr *ad* IΥ *come* b *ad* a

Come dunque la ſomma de' quadrati Rr *e di* IΥ *al quadrato* IΥ, *così il quadrato di* ΥO *al quadrato di* VX; *dunque la ſomma de' quadrati di* Rr + IΥ *è uguale al quadrato* ΥO.

Ciò ſi prova; perchè ſi è veduto, che iI *è uguale ad* Vu, *ed eſſendo* BI, Bi *uguali ad* RF, Rf *per conſtruzione, ſarà uguale la differenza* iΥ, *e* Zf *o* Xu, *onde ancora* IΥ = VX *cioè* $\overline{I\Upsilon}^2 = \overline{VX}^2$; *Ma* $\overline{Rr}^2 + \overline{I\Upsilon}^2 . \overline{I\Upsilon}^2 :: \overline{\Upsilon O}^2 . \overline{VX}^2$; *dunque ſe* $\overline{I\Upsilon}^2 = \overline{VX}^2$ *ſarà ancora* $\overline{Rr}^2 + \overline{I\Upsilon}^2 = \overline{\Upsilon O}^2$

CO-

COROLLARIO.

I. Da ciò si deduce, che il perimetro di due foglie della Clelia sarà uguale all' intera periferia dell' elisse descritta da' predetti semiassi SB, BK.

Spiegazione. *Ciò è manifesto. Una semifoglia della Clelia ha il suo perimetro uguale alla periferia del quadrante elittico STKB; dunque 4 semifoglie, cioè 2 foglie saranno uguali alla periferia di 4 quadranti elittici, cioè di tutta l'elisse.*

II. Quando la ragione di *a* a *b* è di ugualità, il semiasse SB al semiasse BK è come la radice del binario all' unità; ciò che già aveva pronunciato il Viviani del perimetro della sua vela fiorentina, cui si è dimostrato essere l'istessa la Clelia primaria; e noi abbiamo confermato ne' Vivianei, pag. 136.

Spiegazione. *Quando la ragione di* a *a* b *è di ugualità, il semiasse SB al semiasse BK è come la radice del binario all' unità; il che si prova. Se la ragione di* a *a* b *è di ugualità, essendo per costruzione della presente Proposizione PB. BQ::* b . a, *ed essendo per ipotesi* a = b *sarà ancora PB = BQ, e però l'elisse QVKB diverrà il quadrante POKB; onde essendosi fatto SB uguale alla sottesa QK = PK, ed il quadrato di questa essendo doppio del quadrato PB, sarà ancora il quadrato di SB doppio del quadrato di PB; e però* $\overline{SB}^2 . \overline{PB}^2 :: 2 . 1$ *; ed SB a PB come la radice di 2 ad 1.*

III. Se si descriva una Rodonea, a cui in vece della ragione di *a* a *b* serva la ragione del lato, o della radice dell' uno e dell' altro quadrato insieme *bb* ed *aa* ad *a*, sarà il di lei perimetro uguale al perimetro della Clelia descritta nell' Emisferio secondo la ragione di *a* a *b* della Rodonea, che è innograficamente sottoposta alla Clelia; imperocchè l'una e l'altra Curva si dimostrerà uguale alla medesima Elisse.

Spiegazione. *Il che si farà così. Per la Proposizione* XI. *della* I. *Parte si dimostra, che il perimetro* CIE (fig. 16.) *della*

della semifoglia della Rodonea è uguale al perimetro FVQ *del quadrante elittico, i di cui semiassi* CQ, CF *sono fra di loro come* b *ad* a; *nell' istessa maniera, e con l'istessa dimostrazione se la ragione della Rodonea sia della radice di* bb + aa *ad* a, *facendo* (fig. 43.) *come* a *a* $\sqrt{bb + aa}$ *così* BK *a* BS, *sarà il perimetro della semifoglia di detta Rodonea uguale alla periferia* STK *del quadrante elittico* STKB; *Ma la semifoglia della Clelia* PGD, *per quanto si è dimostrato nella presente proposizione ha il perimetro* PGD *uguale alla periferia del quadrante elittico* STK, *la di cui proporzione di* BK *a* BS *è di* a *a* $\sqrt{bb + aa}$, *per costruzione della presente proposizione; dunque la semifoglia della Clelia descritta nell' Emisferio secondo l'innografia della Rodonea della base, e colla proporzione di* a *a* b, *è uguale alla semifoglia della Rodonea descritta nel medesimo circolo secondo la proporzione della radice di* aa + bb *ad* a; *e però l'intera Clelia sarà uguale all' intera Rodonea descritta nel circolo massimo dell' Emisferio secondo la proporzione della radice di* aa + bb *ad* a.

IV. Conforme, pel Corollario I. della Proposizione XI. della I. Parte, la Rodonea è una specie di Elisse ristretta, così la Clelia ce la possiamo immaginare come una certa superficie ungulare cilindrica; onde gli archi paralelli alla base, divengano di paralelli coincidenti, di modo che i loro estremi si uniscano in un polo nella seguente maniera. Si concepisca un quadrante circolare descritto col raggio BP o BK [*fig.* 44.], e che è situato in un piano orizzontale, e sopra quello sia innalzato un cilindro all' altezza PS uguale a BQ della figura 43; il qual cilindro sia segato dal piano SBK, la di cui comune sezione colla superficie cilindrica sarà l'elisse STK determinata di sopra (*Che sia un elisse ingenere è chiaro per la Proposizione VI. delle sezioni cilindriche del Milliet; che sia l'elisse* STK *determinata di sopra si prova*). Poichè il semiasse BS sarà in potenza uguale a PS e PB, cioè a BQ e BK della Fig. 43; Se dunque nella super-

superficie ungulare s'intendano descritti infiniti archi FT, *ft* paralelli alla base PGK, e c'immaginiamo, che gli estremi di questi archi F, *f* si accostino insieme, e che coincidano nel punto P, dal quale i medesimi archi si slarghino con tutti i loro punti, mentre intanto i rimanenti estremi T, *t* sono ugualmente distanti dal centro B, e però disposti nella superficie sferica; che ha per centro l'istesso B; ne verrà, che il quadrante elittico ST*t* sarà trasformato nella Clelia PG*g*D [*fig.* 43.] di lunghezza uguale al detto quadrante, e qualsivoglia Zona FT*tf* sarà ristretta nel triangolo PG*g*, per essere l'arco FT uguale all' arco PG, de' quali è il medesimo seno GR.

SCOLIO.

Da questo però non si può inferire, che la superficie della semifoglia della Clelia PG*g*D sia la metà della superficie ungulare STKP, benchè questa sia ristretta in quella, quantunque ciò vaglia della Rodonea in cui si costringe il quadrante elittico QVKB. La ragione della differenza è questa; perchè quantunque il triangolo BI*i* sia la metà della Zona elittica, che li corrisponde, che è un certo rettangolo della medesima base, ed altezza col triangolo; non però il triangolo sferico PG*g* si potrà arguire, che sia la metà della Zona della superficie cilindrica FT*tf*, benchè abbia l'istessa base, e l'istessa altezza. Poichè l'aria del triangolo sferico non nasce dal prodotto della metà della base nell' altezza, come accade ne' triangoli piani; ma dal prodotto dell' arco H*b* (che è la misura dell' angolo verticale GP*g* presa nel circolo massimo) nell' altezza PR, se si tratti di un triangolo infinitamente piccolo; e finalmente qualsivoglia triangolo sferico è alla superficie dell' Emisferio, come l'eccesso sopra due retti di tutti gli angoli del triangolo è a quattro retti.

Spiegazione. *Essendo troppo utile pel ritrovamento dell' area di qualsivoglia triangolo sferico l'asserta proprietà, si dimostra così dall' Autore.*

Fig. 54.

Sia il triangolo sferico A B C, e continuati i suoi lati nella superficie sferica convengano in F, D, E, (*cioè rappresentando A C D F A un circolo massimo, B C E F B un altro circolo massimo, e B A E D B un altro suddetto, converrà il lato B C prodotto col lato A C prodotto in F, similmente il lato A C col lato B A converrà in D, ed il lato B C col lato B A pure converrà in E*) il triangolo C D E sarà uguale al triangolo B F A; perchè l'arco C E = B F, compiendo l'uno e l'altro con l'istesso B C un semicircolo (*cioè B F il semicircolo F B C, e C E il semicircolo B C E; onde levando da i due semicircoli uguali l'arco comune B C, resteranno B F = C E*), per l'istessa ragione sarà D C = A F (*per compire D C con l'istessa A C, il semicircolo D C A, ed A F il semicircolo F A C*) e similmente sarà D E = B A per compire con l'arco E A parimente un semicircolo. Dunque A B C + C D E = A B C + B F A, ed essendo il bilineo C A F B C composto de' due triangoli A B C e B A F, sarà A B C + C D E = C A F B C; il quale bilineo sta alla superficie sferica, come l'angolo C a quattro retti [*poichè supposti C ed F i poli di un circolo massimo, che seghi i semicircoli C A F, F B C in due parti uguali, sarà per conseguenza l'arco intercetto la misura dell' angolo C, o F. per Teodosio, e però sarà tutto il bilineo suddetto, che è sotto l'altezza F C e l'arco intercetto, alla superficie sferica, che per Archimede è sotto la medesima altezza, e la circonferenza intera, come quest' arco o angolo a tutto il circolo, o a quattro retti*] ed all' emisferica come il detto angolo C a due retti. Nell' istessa maniera il bilineo B A E C B = A B C + C A E sta all' emisferica superficie, come l'angolo B a due retti, ed il bilineo A B D C A, cioè A B C + B C D sta all' emisferica superficie come l'angolo A a due retti; dunque A B C + C D E + A B C + C A E + A B C + B C D = 3 A B C + C D E + C A E + B C D sta alla superficie emisferica come gli angoli C + B + A a due retti; cioè 3 A B C + C D E + C A E + B C D, ad A B C + C D E + C A E + B C D (il complesso de' quali uguaglia appunto la superficie emisferica)

come

come C + B + A a 2. retti; onde [*dividendo*] 3 ABC + CDE + CAE + BCD − ABC − CDE − CAE − BCD = 2 ABC stanno ad ABC + CDE + CAE + BCD come C + B + A − 2 retti a 2 retti; e dimezzando gli antecedenti, sarà ABC. Emisferica superficie :: $\frac{C + B + A - 2 \text{ retti}}{2}$. 2 retti; cioè ABC. emisferica superficie :: C + B + A − 2 retti, 4 retti; il che doveva dimostrarsi.

COROLLARIO I.

Da ciò si deduce (fig. 40.), *che fatto l'angolo HPE uguale all' eccesso degli angoli di qualsivoglia triangolo sferico sopra due retti, e gli angoli ad H ed E retti, sarà il triangolo HPE uguale a qualsivoglia triangolo sferico, di cui la somma degli angoli sia uguale alla somma degli angoli del triangolo HPE; poichè l'area del triangolo HPE è alla superficie dell' Emisferio, come HE a tutto il circolo della base, o come l'eccesso sopra due retti per costruzione a quattro retti per Archimede.*

COROLLARO II.

Si nota di più, che per avere l'area di qualsivoglia triangolo sferico basta aver noti gli angoli del medesimo; poichè facendo come quattro retti all' eccesso degli angoli del triangolo sopra due retti, così la superficie dell' Emisferio ad un quarto, questo darà l'area ricercata del triangolo sferico.

SCOLIO.

Quando parlasi de' triangoli sferici, s'intende sempre de' triangoli formati da tre archi di circoli massimi. Per altro volendo l'area di un triangolo sferico [fig. 55.] *ADE composto di due archi ABD ed AE noti di circolo massimo, e dell' arco DE paralello ad un altro circolo* Fig. 55.

 massi-

massimo dato in gradi e di posizione , e dati gli angoli del triangolo ADE, averemo l'area di questo triangolo con immaginarci a i punti D ed E tirati dal polo C dell' arco DE due semmenti uguali di circoli massimi CD, CE, che saranno noti, essendo nota la distanza di DE dal circolo massimo, che ha per polo il punto C, e gli angoli ad E e D retti (per la Proposizione XV. Libro I. degli Sferici di Teodosio), *e però levando dall' angolo AED noto il retto CED, resterà noto l'angolo BEA del triangolo BAE; ed essendo noto l'angolo BAE, e l'arco AE dato, averemo per le regole della Trigonometria sferica noto l'angolo ABE; onde pel Corollario II. di questa sarà nota l'area del triangolo ABE. Similmente nel triangolo BCD, ho noto l'angolo BCD, e l'angolo CBD, che è uguale all' angolo ABE al vertice, e l'angolo CDB residuo ad un retto del dato angolo ADE; ovvero avendo noti gli angoli BCD e CDB residuo ad un retto dell' angolo ADE dato, ed avendo noto l'arco CD, per le regole della Trigonometria sferica averò noto l'angolo CBD; dunque pel Corollario secondo di questa sarà nota l'area del triangolo CBD; ed avendosi nota l'area del triangolo CDE (per quello che si dimostra al Corollario della spiegazione della Proposizione V. di questa II. Parte al* §. Che poi il triangolo PIG, ec.) *levando da questa l'area del triangolo CBD nota averò nota l'area del triangolo DBE la quale aggiunta all' area ritrovata BAE darà l'area ricercata del triangolo DAE; il che, ec.*

PRO-

PROPOSIZIONE IX.

Fig. 45.

GLI archi TG, tg nella superficie emisferica paralelli al massimo circolo orizzontale FE, intercetti fra la Clelia primaria della seconda descrizione PGF, ed il meridiano PTF, che passa pel mezzo della foglia, si dividano, o si accrescano fino a i punti S ed s, di maniera che sia TS a TG, e ts a tg in una data ragione di a a b, la curva PSsF, che passa per questi punti, determinerà la semifoglia di una Clelia della medesima ragione data.

Imperocchè l'innografia di una tal Clelia primaria della seconda descrizione PGF è il semicircolo, BIF, degli archi poi circolari TG, *tg* saranno gli archi NI, *ni* concentrici ad FDE, e racchiusi in detto semicircolo, che dalle rette SR, *sr* perpendicolari al piano orizzontale ne' punti R ed *r*, saranno divisi, o accresciuti proporzionalmente nella medesima ragione di *a* a *b*, con la quale sono divisi, o accresciuti gli archi TG, *tg* a i punti S, *s*; onde la curva PSF averà per innografia la curva BRF, che sega proporzionalmente gli archi concentrici tirati nel semicircolo; ma questa pel Corollario II. e III. della Proposizione XII. della I. Parte è una Rodonea; dunque quella sarà una Clelia della seconda descrizione determinata secondo la medesima ragione; il che, ec.

Spiegazione. *Imperocchè l'innografia di una tal Clelia primaria PGF è il semicircolo BIF, ec. Poichè dovendo descriversi la Clelia PSsF con dividere gli archi TG*, tg *in S ed* s, *di maniera che sia TS a TG, e* ts *a* tg *come* a *a* b, *la sua innografia sarà la Rodonea BRrF descritta per mezzo degli archi NI*, ni, *e del semicircolo BIF; l'innografia poi degli archi circolari TG*, tg *saranno gli archi NI*, ni, *che sono paralelli all' arco FD della base, a cui sono pure paralelli gli archi TG*, tg, *pel supposto della presente Proposizione; onde saranno simili fra di loro, e però saranno similmente divisi dalle perpendicolari SR*, sr *ne' punti R ed* r, *ec.*

CO-

COROLLARJ.

I. Da ciò si deduce, che la semifoglia di qualsivoglia Rodonea B R *r* F alla sua Clelia P S *s* F, ancorchè descritta nella superficie della porzione minore dell' Emisferio (poichè anche di questa si farà l'istesso discorso) è come qualsivoglia altra Rodonea B I F alla Clelia, che le corrisponde P G F. Imperocchè la Rodonea B R F è alla Rodonea B I F nella ragione di *a* a *b*, la quale conserva qualsivoglia arco N R ad N I, o T S a T G, e però come la Clelia P S F alla Clelia P G F; onde permutando, sarà chiaro ciò, che si doveva dimostrare.

II. La semifoglia della Clelia secondaria descritta nell' Emisferio è al doppio del semmento circolare del quadrante massimo segato dalla corda P E, che dal polo è tirata al margine della base dell' Emisferio, come *a* a *b*.

Spiegazione. *Ciò proviene perchè pel Corollario IV. della Proposizione VI. di questa Parte tutte le foglie della Clelia della seconda descrizione descritta nell' Emisferio, sono uguali a* 8 *semmenti circolari P E; onde essendo la Clelia P G F, la di cui innografia è il semicircolo B I F, composta di sole due foglie, saranno* 4 *semifoglie P G F uguali a* 8 *semmenti circolari P E; e però ognuna di loro sarà uguale a due semmenti circolari P E; ed essendo la semifoglia della Clelia secondaria P S F alla semifoglia P G F come* a a *b*, *sarà la medesima semifoglia P S F al doppio del semmento circolare P E come* a *a* b.

III. E perchè l'arco F D intercetto dal meridiano P D B, che tocca in P la Clelia P S F è al quadrante F D E nella medesima ragione di *a* a *b*; ovvero il settore della superficie sferica, che circonscrive la detta Clelia, è al quadrante della superficie emisferica, che è circonscritto intorno la Clelia primaria P G F, sarà ancora il residuo trilineo P S F D al trilineo P G F D E, cioè alla quarta parte della Vela Fiorentina, o al quadrato del raggio B E uguale alla medesima, come *a* a *b*; cioè fatta

B K

BK a BE, come *a* a *b*, sarà il trilineo PSFD uguale al rettangolo EBK.

Spiegazione. *L'arco FD intercetto dal Meridiano PDB, ec. è al quadrante FDE nella medesima ragione di* a *a* b; *poichè essendo la Rodonea BRF alla Rodonea BIF nella ragione di* a *a* b, *per quello che si dimostra alla spiegazione del Corollario IV. della Proposizione XII. della I. Parte, ed essendo la Rodonea BRF la metà del settore FBD che la comprende, e la Rodonea BIF la metà del quadrante FBE per la Proposizione VIII. della I. Parte; dunque come la Rodonea BRF alla Rodonea BIF, così il settore FBD al quadrante FBE, e però come* a *a* b. *Ma come il settore FBD al quadrante FBE, così l'arco FD all'arco FE, e come l'arco FD all'arco FE, così il settore Emisferico FTPD al quadrante FTPE (per essere i due settori suddetti espressi da* $FD \times PB$, $FE \times PB$ *per Archimede); dunque il settore FTPD sarà al quadrante FTPE, come* a *a* b. *Levando dunque dal settore FTPD la semiclelia FTPSF, e dal quadrante FTPE la semiclelia FTPGF, saranno ancora i residui FSPD, ed FGPE come* a *a* b; *cioè il trilineo FSPD alla quarta parte della Vela Fiorentina (pel Corollario V. della Proposizione IV. Parte II.) o al quadrato del raggio uguale a quella; poichè essendo pel Corollario suddetto la quarta parte del quadrato del diametro della sfera [per essere tutte 4. dette parti FGPE uguali al quadrato del diametro suddetto;] di cui essendo pure la quarta parte il quadrato del raggio, sarà però FGPE uguale al quadrato del raggio; e però FSPD al quadrato del raggio BE, come* a *a* b; *cioè fatta BK a BE come* a *a* b, *sarà* $FSPD . \overline{BE}^2 :: BK . BE$, *e però* $FSPD \times BE = BK \times \overline{BE}^2$ *e (dividendo per BE)* $FSPD = EBK$; *il che, ec.*

AP-

APPENDICE.

COSTRUZIONE DI UN NUOVO SPEDITISSIMO MESOLABIO.

PER *una facile pratica invenzione di due medie continue proporzionali fra due linee date.* Fig. 46.

Sieno date le rette DE, DN, dalle quali si faccia il rettangolo NDEF., e li sia circonscritto il circolo DKF, e si ponga il tutto in un piano verticale: di maniera che la minore delle rette date, come DN, sia orizzontale, e l'altra DE perpendicolare al piano dell' orizzonte. Prolungata adunque ND verso B, per modo che BD sia uguale a DH, cioè alla metà di DN, ed innalzata la perpendicolare BA, si inclini ad essa dal punto D la retta DA uguale alla metà di DE, cioè a DP, e piantato in A un chiodo, si attacchi il filo AQ tirato dal piombo Q, la di cui lunghezza sia sesquialtera di DE, cioè uguale all' uno, ed all' altro insieme AD e DE.

Dipoi posto uno stile al filo in B, a poco a poco si conduca lo stile per la linea orizzontale BNI con promuovere il filo, di maniera che successivamente riceva la porzione ADE, AHO, ANR, AIK. [sarà più sicuro in vece di uno stile servirsi di un ago, nel di cui foro sia inserito il filo]. Quando adunque il piombo Q, che tien teso il filo, e che per E sarà entrato nell' area del circolo, comincerà ad uscire da quella al punto K, ancor questo si segni nella circonferenza; imperocchè tirata KL paralella a DN, saranno KL, EL le due medie ricercate fra le date ED, DN.

DIMOSTRAZIONE.

Poichè A I con I K è uguale ad A D con D E, levatigli uguali I K e D L, farà A I uguale ad A D con L E; dunque il quadrato di A I, o il complesso de' quadrati A D e D I col doppio rettangolo I D B, sarà uguale a i quadrati A D, ed L E più il doppio rettangolo di A D in L E. Levato dunque il comune quadrato $\overline{AD}^2$, sarà il quadrato di D I col rettangolo I D N (poichè D N è doppia di D B) uguale al quadrato di L E col doppio rettangolo di A D in L E, ovvero col rettangolo D E L (per essere D E doppia di D A). Ma il quadrato di I D è uguale a' rettangoli I D N e D I N; dunque aggiunto di nuovo I D N, saranno due rettangoli K L M col rettangolo L K M, o con V L K uguali al quadrato di D I col rettangolo I D N, o al quadrato di L E insieme col rettangolo D E L, cioè al doppio quadrato di L E col rettangolo D L E; e levati gli uguali rettangoli V L K, D L E, resteranno due rettangoli K L M uguali a' due quadrati di L E, ed ognuno sarà uguale ad ognuno; e però L K sarà ad L E, come L E ad L M, ovvero alla data D N; di nuovo al quadrato di L E aggiunto il rettangolo D L E, ed al rettangolo K L M [che è uguale al quadrato di L E] aggiunto il rettangolo di L K M, che è uguale al rettangolo V L K, o D L E, sarà il rettangolo D E L uguale al quadrato L K, per lo che ancora D E ad L K è come L K ad L E; onde D E, L K, L E, L M sono in continua proporzione; il che si doveva fare.

Spiegazione. *Dunque il quadrato di A I, o il complesso de' quadrati di A D e D I col doppio rettangolo I D B, per la Proposizione XI. Libro II. di Euclide, sarà uguale a i quadrati di A D ed L E, ed al doppio rettangolo di A D in L E per la quarta del secondo.*

Ma il quadrato di I D è uguale a i rettangoli I D N e D I N per la seconda del secondo. Dunque aggiunto di nuo-

nuovo IDN, *saranno due rettangoli* IDN *insieme con* DIN, *ovvero due rettangoli* KLM *col rettangolo* LKM (*e ciò per essere* KL = ID, LM = DN, IN = MK) *o con* VLK (*per esser* VL = MK; *poichè essendo per costruzione* DN *diviso per metà in* H, *dal centro* C *tirata la* CH *sarà perpendicolare a* DN, *e però ancora* CG *ad* VK, *onde* VG = GK; *Ma ancora* LG = GM; *dunque i residui* VL = MK) *uguali al quadrato di* DI *col rettangolo* IDN, *o al quadrato di* LE *col rettangolo* DEL [*e ciò per essersi mostrato di sopra che* $\overline{DI}^2 + IDN = \overline{LE}^2 + DEL$], *cioè al doppio quadrato di* LE *col rettangolo* DLE; (*Poichè il rettangolo* DEL *è uguale al quadrato di* LE, *ed al rettangolo* DLE *per la terza del secondo*, *e però due rettangoli* KLM *col rettangolo* VLK *saranno uguali al doppio quadrato di* LE *col rettangolo* DLE), *e levati i rettangoli* VLK, DLE (*che sono uguali per la* 35. *del terzo*) *resteranno due rettangoli* KLM *uguali a due quadrati di* LE, *ed ognuno sarà uguale ad ognuno, ec.*

Di nuovo al quadrato di LE *aggiunto il rettangolo* DLE, *ed al rettangolo* KLM (*che è uguale al quadrato di* LE) *aggiunto il rettangolo* LKM (*che è uguale al rettangolo* VLK *o* DLE, *sarà il rettangolo* DEL *uguale al quadrato di* LK.

Poichè si farà $\overline{LE}^2 + DLE = KLM + LKM$, *ed essendo per la terza del secondo* $\overline{LE}^2 + DLE = DEL$, *e di più essendo* $\overline{LK}^2 = KLM + LKM$ *per essere ogni quadrato composto di due rettangoli sotto il lato del quadrato, ed uno de' semmenti, in cui è diviso detto lato per la seconda del secondo*, *ne verrà* $DEL = \overline{LK}^2$, *ec.*

SCOLIO.

Essendo la dimostrazione della presente Proposizione fondata su l'uguaglianza, si potrà dimostrare per mezzo dell' equazioni algebriche così.

Per costruzione $AI + IK = AD + DL\ (IK) + LE$; *onde resterà* $AI = AD + LE$; *dunque per la quarta del secondo* $\overline{AI}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{LE}^2 + 2AD \times LE$, *e per la undecima del secondo* $\overline{AI}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DI}^2 + 2IDB$; *e però averemo* $\overline{AD}^2 + \overline{DI}^2 + 2IDB = \overline{AD}^2 + \overline{LE}^2 + 2AD \times LE$; *onde* $\overline{DI}^2 + 2IDB = \overline{LE}^2 + 2AD \times LE$; *Ma* $DB = \frac{1}{2}DN$, *e* $DA = \frac{1}{2}DE$ *per costruzione; dunque sarà* $\overline{DI}^2\ (\overline{LK}^2) + IDN\ (KLM) = \overline{LE}^2 + DEL$; *Ma* $\overline{LK}^2 = KLM + LKM$ *per la seconda del secondo, dunque ne verrà* $2KLM + LKM = \overline{LE}^2 + DEL$; *ma* $LKM = VLK$ (DLE *per la 35. del 3.*) *e* $DEL = \overline{LE}^2 + DLE$ *per la terza del secondo, dunque averemo* $2KLM + DLE = 2\overline{LE}^2 + DLE$, *cioè* $KLM = \overline{LE}^2$; *e però* $KL.LE :: LE.LM$;

Ora essendo $KLM = \overline{LE}^2$, *ed essendosi veduto* $LKM = DLE$ *ne verrà* $KLM + LKM. = \overline{LE}^2 + DLE$, *cioè* $\overline{LK}^2$ *per la seconda del secondo* $= DEL$ *per la terza del secondo, e però* $DE.LK :: LK.EL$, *ed unendo insieme la ragione ritrovata di sopra, averemo la ricercata pro-*

porzio-

porzione D E. L K :: L K. E L :: E L. L M [D N], *e fra le due date* D E, D N *le due medie continue proporzionali* L K, E L; *il che, ec.*

Merita però rifleſſione, che la curva Q E O K deſcritta in tal moto dal peſo Q, è un' Iperbole equilatera, il di cui aſſe è il doppio di A B; imperocchè ordinata qualſivoglia O S, ſe ſi ponga l'una e l'altra Q T, ed X T, uguale ciaſcheduna ad A B (poichè A H con H O è uguale ad A Q) levati gli uguali H O, B S, ſarà A B, o T Q con S Q, cioè T S uguale ad A H, e però il quadrato di T S, cioè il rettangolo X S Q col quadrato di T Q, per la ſeſta del ſecondo, ſarà uguale a i quadrati di B H, ed A B, ovvero di O S, e T Q; onde levato il comune quadrato di T Q, reſterà il rettangolo X S Q uguale al quadrato dell' ordinata O S e però il punto O apparterrà, all' Iperbole equilatera, il di cui aſſe X Q è doppio di A B.

Spiegazione. *Eſſendo il rettangolo* X S Q *uguale al quadrato dell' ordinata* O S, *ſarà la curva* Q E O R K *un' Iperbole per ciò che ſi deduce dalla Propoſizione V. delle ſezioni coniche del noſtro Autore, e per l' VIII. Propoſizione di dette ſezioni ſarà un' Iperbole, che averà il lato traſverſo uguale al lato retto; poichè per la detta Propoſizione, come il rettangolo* X S Q *al quadrato di* S O, *così il lato traſverſo* Q X *al lato retto, ma* $XSQ = \overline{SO}^2$, *dunque* Q X = *al lato retto, e però l'Iperbole ſarà equilatera per la proprietà dell' Iperbole equilatera, come ſi accenna al Corollario II. della Propoſizione XXXV. delle dette Sezioni.*

Nell' iſteſſa maniera qualſivoglia altro punto preſo nel medeſimo filo fra Q e B, [il che poſſiamo diſtinguere con qualche tenue filo di ferro, o nodo di altro colore, o qualche altro ſegno viſibile] deſcriverà la medeſima curva Iperbolica differente dalla prima per la ſola poſizione, anzi collocata ſopra la medeſima in un ſito paralello, e ciò fino che la deſcrizione ſi conterrà ſotto la retta B I; imperocchè quando il punto, che deſcrive la Curva, paſſerà ſopra l'orizzontale B I, è manifeſto

sto che continuato il medesimo moto, dopo descriverà un arco circolare intorno al centro A.

Spiegazione. *Che la curva Iperbolica descritta da un nodo posto nel filo AQ sopra il peso Q, sia la medesima della prima, e differente per la sola posizione, è chiaro; se si considera, che il peso Q sia il detto nodo, e si applichi la medesima dimostrazione posta al* §. Merita però riflessione; *giacchè la descrizione, o costruzione è la medesima.*

Che poi passando il punto Q, o quello che descrive la curva, sopra l'orizzontale BI, continuando il medesimo moto, descriva un arco circolare intorno al centro A, è manifesto; poichè arrivato il peso Q al punto di BI prolungata dove il peso Q tocchi la linea BI, che sia detto punto per maggiore intelligenza I, sarà allora AQ = AI; e dovendo il peso Q, pel supposto, girare intorno al punto A colla linea AI tesa nell' istesso modo e sempre la medesima, la curva descritta dal peso, o nodo Q sarà un semmento di circolo.

Di quì ne viene, che con questa sempliciſſima operazione meccanica si potrà sciorre ogni Problema Solido, come la trisezione dell' angolo, la divisione della sfera, per mezzo di un piano perpendicolare all' asse, in parti che abbiano fra di loro la data ragione, la duplicazione del cubo, ec. Poichè, come è noto a i Geometri, qualsivoglia Problema Solido coll' intersezione dell' Iperbole, o di qualsivoglia altra sezione conica di una specie data col circolo, si può risolvere, ec.

Per corona di quanto si è detto, si pone quì una dimostrazione, del nostro Autore per trovare la trisezione dell' angolo dato.

Fig. 56. Sia l'angolo dato l'angolo DCG, e sia DG perpendicolare sopra CG, e fatta CO = CG compiscasi il rettangolo GOHD, i cui lati OG, HD sieno indefinitamente prolungati verso P ed F, e fatta CE doppia di CD, col raggio CE, descrivasi l'arco circolare EF segante la CG in F, e sia FB paralella a CE, con cui concorra la CH in B, e posta BH perpendicolare all' orizzonte si faccia retto l'angolo FBA, e si ponga BA = CH =

HQ

HQ, e fissato il chiodo in A nel piano verticale con la funicella ABC [BCH] tirata dal piombo C, tirandola lungo la retta BF, fino che giunga al sito AIK, in cui il piombo K seghi il cerchio EF in K, si congiunga CK; dico che l'angolo GCK sarà un terzo del proposto DCG.

Imperocchè condotta KR paralella ad IB, o ad MD, e di più essendo $AI + IK = AB + BC = BH$, tolte l'uguali IK, BR, sarà $IA = HR$; dunque li quadrati di IB, BA, ovvero KR, CH uguagliano il quadrato $\overline{RH}^2 = QRC + \overline{CH}^2$ [*per la sesta del secondo di Euclide, cioè saranno* $\overline{KR}^2 + \overline{CH}^2 = QRC + \overline{CH}^2$] e tolto di comune il quadrato di CH resta il rettangolo QRC = al quadrato KR; dunque il punto K è ad un' Iperbole equilatera [*per quello, che si avverte alla spiegazione a carte 109.*] il di cui lato trasverso CQ, e la cui tangente DM paralella all' ordinate; il centro H, e gli assintoti HP, HM, e stesa KC agli assintoti in P ed N, segando la DG in L, sarà $CL = CN$, come $GC = CO$ *per costruzione (poichè saranno i triangoli CGL, CNO simili ed uguali); Ma* $CN = PK$ *pel Corollario IV. della Proposizione XXIV. delle Sezioni Coniche del nostro Autore; dunque* $CL = CN = PK$, e posta di comune KL, sarà $LP = CK = CE = 2CD$; sicchè divisa PL pel mezzo in S, sarà S il centro di un semicircolo descritto sul diametro PL, che passerebbe per l'angolo retto PDL, e sarà $SD = SL = \frac{1}{2}PL = CD$ (*per essersi provato* $CD = \frac{1}{2}PL$); dunque l'angolo $DCS = DSC =$ il doppio di $SPD = 2SCG$ [*per essere* $SCG = SPD$ *fra le paralelle*], *e però essendo* $SCD = 2SCG$, *sarà* $SCD = \frac{2}{3}DCG$; *onde* $SCG = \frac{1}{3}DCG$; il che era, ec.

Sicchè con l'artifizio di quel pendolo, il di cui capo stando in un punto fisso vadasi tirando la corda lungo una linea

linea retta, siasi orizzontale o inclinata, e l'altro termine sia tirato perpendicolarmente dal peso, sempre viene descritta un' Iperbole, con cui ogni equazione del terzo grado si scioglie, potendosi levare il secondo termine dall' equazione; onde se rimane il terzo termine, si riduce il quesito alla trisezione dell' angolo; se manca esso ancora, si riduce esso ancora all' invenzione delle due medie proporzionali, come ha insegnato l'Autore nel suo Mesolabio.

IL FINE.

ERRORI			CORREZIONE.
Pag.	lin.		
7	34	*eſse*	*eſſi*
12	15. 16. 18.	conneſſità	conveſſità
18	6	1 b.a::1.1	I. b.a::1.1
19	7	ad Hg	ad H*b*
25	6	ab.a::a.1	ab.b::a.1
26	24	CE	$\frac{1}{2}$ CE
31	25	CurH*triangolo*	CurH *al triangolo*
33	22	*nel quadarnte*	*nel quadrante*
35	6	*il doppio del quadrato*	*al doppio del quadrato*
66	24	*e l'ugula*	*e l'ungula*
68	28	*ovvero dell' ungula*	*ovvero l'ungula*
72	19	*area ugulare*	*area ungulare*
76	22	*per la Propoſizione XV.*	*per la Propoſizione X.*
78	25	*cioè* $\overline{FB}^2$	*cioè* $\overline{FP}^2$
88	18	Fig. 53.	Fig. 41.
94	7	*è come IY Rr*	*è come IY ad Rr*
95	34	*per la Propoſizione II.*	*per la Propoſizione XI.*
96	2	CQ, CF	CF, CQ

E nella Prefazione

facc. 3	24	*perfazione*	*prefazione*

Tab. I

Fig. 1

2

6

7

12

13

18

19

24

Tab. II
25
30
31
36
37
41
42
46
B. Scrilli Scul.